

THIAGO WILHELMSSEN LOUREIRO

**ANÁLISE PARAMÉTRICA DO CONJUNTO PISTÃO, BIELA E  
ÁRVORE DE MANIVELAS COM FOCO NA REDUÇÃO DE PERDAS  
POR ATRITO E DE CONSUMO DE COMBUSTÍVEL**

São Paulo (SP)

2009

THIAGO WILHELMSSEN LOUREIRO

**ANÁLISE PARAMÉTRICA DO CONJUNTO PISTÃO, BIELA E  
ÁRVORE DE MANIVELAS COM FOCO NA REDUÇÃO DE PERDAS  
POR ATRITO E DE CONSUMO DE COMBUSTÍVEL**

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado à Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo para obtenção  
do Título de Mestre Profissional em  
Engenharia Automotiva

Área de Concentração:  
Engenharia Automotiva

Orientador: Prof. Dr. Celso Pupo Pesce

São Paulo (SP)

2009

## FICHA CATALOGRÁFICA

**Loureiro, Thiago Wilhelmsen**

**Análise paramétrica do conjunto pistão, biela e árvore de manivelas com foco na redução de perdas por atrito e de consumo de combustível / T.W. Loureiro. -- São Paulo, 2009.**

**218 p.**

**Trabalho de conclusão de curso (Mestrado Profissional em Engenharia Automotiva) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.**

**1. Lubrificação 2. Atrito 3. Pistões 4. Modelos matemáticos  
I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica II. t.**

## **DEDICATÓRIA**

Dedico este trabalho aos meus pais que acreditaram em meu potencial e que sempre me apoiaram, possibilitando a conclusão de mais uma etapa.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Professor Doutor Celso Pupo Pesce, pela orientação e auxílio, bem como pelo constante estímulo transmitido durante todo o trabalho.

Aos colegas de trabalho, não só pelas orientações e sugestões fornecidas no desenvolvimento do problema, mas também por compartilhar informações e experiências passadas.

E a todos que colaboraram, direta ou indiretamente, na execução deste trabalho.

Nem tudo que se enfrenta pode ser  
modificado, mas nada pode ser  
modificado até que seja enfrentado.

(Albert Einstein)

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma análise paramétrica do conjunto pistão, biela e manivela de um motor de ignição por centelha, com foco no rendimento mecânico e no consumo de combustível, por meio de simulações dinâmicas. O simulador implementa modelo matemático da dinâmica secundária do pistão, constante da literatura técnica. A exposição do problema e estabelecimento do objetivo do trabalho, são seguidos de revisão bibliográfica de tópicos relativos ao rendimento mecânico do conjunto aqui analisado, bem como a estudos anteriores relevantes para a compreensão do desenvolvimento realizado. Em seguida são expostas a metodologia e as características do modelo aqui aplicado. Este, por sua vez, considera lubrificação elastohidrodinâmica entre o cilindro do motor e a saia do pistão, os efeitos das ondulações da superfície do pistão e a movimentação do conjunto ao longo do cilindro. A rotina numérica desenvolvida para calcular este modelo também é apresentada. Os parâmetros investigados na análise paramétrica incluem o comprimento da biela, as ondulações presentes nas saias do pistão e o *offset* do pino do pistão. Os resultados obtidos referem-se ao motor funcionando em 2500 rpm e com 70% de sua carga total. Uma análise comparativa é, então, realizada, tendo como base a trajetória lateral do pistão, as forças normais à saia, bem como as forças de atrito entre a saia do pistão e o cilindro do motor em função da posição da árvore de manivelas.

Palavras-chave: Conjunto pistão, biela e manivela. Lubrificação. Atrito. Saia do pistão. Rendimento mecânico.

## **ABSTRACT**

This work presents a parametric analysis of the piston assembly of an Otto cycle engine, focusing on mechanical efficiency and fuel consumption through the implementation of a numerical model of the piston secondary motion that was previously published in the technical literature on the subject. Firstly the issue and the goals of the work are presented, followed by a bibliographic review of the topics related to both the mechanical efficiency of the studied set and to previous studies that are relevant to understanding the development of the work. Then, the methodology and the characteristics of the studied model are presented. This model considers a mixed lubrication between the cylinder liner and the piston skirt, the piston skirt surface waviness and also the movement of the set through the course of the cylinder. The numeric routine developed to calculate this model is also presented. The studied parameters include the connecting rod length, the piston skirt waviness and the piston offset. The simulation condition refers to the engine at 2500 rpm and with 70% load. A comparative analysis is finally made using the results of lateral motion of the piston inside the cylinder bore, the hydrodynamics and contact forces as well as the friction force between the piston skirt and the cylinder liner as a function of the crankshaft angle.

**Keywords:** Piston assembly. Lubrication. Friction. Piston skirt. Mechanical efficiency.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1. Comparativo das formas de perdas por atrito de um motor de ignição por centelha e um motor de ignição por compressão.....	28
Figura 2. Comparativo das principais fontes de atrito internas do motor sem a ocorrência de combustão. ....	31
Figura 3. Pressão de combustão atuando no topo do pistão .....	32
Figura 4. Objeto de estudo - Motor EA111 1,4 litros .....	36
Figura 5. Ciclo Padrão a Ar .....	40
Figura 6. As quatro fases de operação do motor .....	41
Figura 7. Seqüência de eventos nos quatro ciclos do motor – Pressão dentro da câmara de combustão e volume do cilindro em função da posição da árvore de manivelas. ....	43
Figura 8. Diagrama p-V de um motor de combustão interna.....	45
Figura 9. Pistão do motor EA111 1,4l.....	49
Figura 10. Principais nomenclaturas do pistão.....	50
Figura 11. Detalhe da saia de um pistão após a utilização – Em destaque região onde ocorreu desgaste.....	52
Figura 12. Comparativo das alturas dos perfis estudados .....	53
Figura 13. Comparativo dos resultado obtidos - (a) Força de atrito máxima em função do perfil de saia; (b) Parcelas das forças hidrodinâmicas e forças de contato de cada perfil.....	54
Figura 14. Perfil da superfície de uma saia de pistão novo.....	55
Figura 15. (a) Detalhe das marcas de usinagem consideradas; (b) Perdas por atrito em função da rugosidade do pistão .....	56
Figura 16. Valor máximo da força lateral no pistão em função da relação “l/r” .....	58
Figura 17. Pressão média efetiva relativa ao atrito do pistão em função de “l/r”, rotação e carga do motor .....	59

Figura 18. Influência da relação “l/r” e do curso do pistão no consumo de combustível .....	60
Figura 19. Comparativo entre: motor antes das alterações e após as alterações de atrito - Torque do motor X Rotação do motor .....	62
Figura 20. Medição de ruído interno do veículo em função da relação “l/r” - RMS [dBA] x Rotação do motor [rpm] .....	63
Figura 21. Bloco do motor EA111 1,4l.....	64
Figura 22. Detalhe da superfície do cilindro do bloco do motor.....	65
Figura 23. Comparativo da força de atrito do motor operando com combustão e sendo acionado externamente em função do ângulo da árvore de manivelas...	68
Figura 24. Comparativo da potência de atrito do motor operando com combustão e sendo acionado externamente em função da temperatura do óleo e da rotação .....	69
Figura 25. Seção de um bloco de motor com dispositivo de medição de atrito do pistão baseado no método da camisa flutuante .....	71
Figura 26. Motor de pesquisa de atrito do conjunto pistão e anéis com cilindro flutuante suportado por molas.....	72
Figura 27. Esquema da condição de operação do pistão e o cilindro do motor .....	74
Figura 28. Diagrama de Stribeck – Coeficiente de atrito em função da relação entre viscosidade do fluido, velocidade relativa e da carga unitária.....	75
Figura 29. Duas superfícies esquemáticas sob regime de lubrificação misto .....	76
Figura 30. Duas superfícies não paralelas com filme de óleo entre elas .....	80
Figura 31. Distribuição de pressão em função da relação $h_1/h_2$ .....	81
Figura 32. Capacidade adimensional de carga em função da relação $a=h_1/h_2$ .....	82
Figura 33. Comparativo de distribuição de pressões .....	83
Figura 34. Representação esquemática da rugosidade superficial .....	83
Figura 35. Espessura do filme hidrodinâmico.....	84
Figura 36. Os fatores de fluxo para uma superfície isotrópica .....	85

Figura 37. Imperfeição da saia do pistão .....	86
Figura 38. Espessura do filme hidrodinâmico.....	88
Figura 39. Detalhe da ondulação da superfície da saia .....	89
Figura 40. Detalhe do contato metal com metal entre a saia do pistão e o cilindro do motor.....	90
Figura 41. Variáveis de análise e suas relações .....	92
Figura 42. Esquema do sistema pistão, biela e manivela utilizado .....	95
Figura 43. Principais dimensões utilizadas do pistão .....	96
Figura 44. Dimensões das larguras das saias do pistão .....	96
Figura 45. Parâmetros geométricos do mecanismo .....	100
Figura 46. Esquema das forças que atuam no pistão .....	102
Figura 47. Esquema da superfície da saia do pistão.....	109
Figura 48. Esquema da distribuição das forças normais a saia do pistão .....	113
Figura 49. Contato metal com metal verificado nos picos da ondulação com deformação local.....	115
Figura 50. Esquema da distribuição das forças normais a saia do pistão .....	117
Figura 51. Malha de pontos do domínio utilizada na determinação da pressão hidrodinâmica na saia do pistão .....	121
Figura 52. Malha de pontos do domínio utilizada na determinação da pressão de contato na saia do pistão .....	126
Figura 53. Diagrama de blocos do modelo numérico .....	128
Figura 54. Diagrama de blocos do subsistema para o cálculo das forças excitantes e da cinemática do pistão.....	129
Figura 55. Detalhe do cálculo das coordenadas generalizadas no diagrama de blocos principal .....	130
Figura 56. Gráfico da evolução da pressão na câmara de combustão .....	134
Figura 57. Comparativo do comprimento das bielas analisadas .....	135

Figura 58. Comparativo do <i>off-set</i> do pino do pistão analisados.....	137
Figura 59. Gráfico das excentricidades $e_t$ e $e_b$ , durante os quatro primeiros ciclos de simulação, a 2500 rpm e com o conjunto de parâmetros originais do motor ...	138
Figura 60. Gráfico das excentricidades $e_t$ e $e_b$ a 2500 rpm e com o conjunto de parâmetros originais do motor.....	139
Figura 61. Gráfico das velocidades dos pontos $P_t$ e $P_b$ a 2500 rpm e com o conjunto de parâmetros originais do motor.....	140
Figura 62. Gráfico da força de atrito nas saias do pistão a 2500 rpm e com o conjunto de parâmetros originais do motor .....	141
Figura 63. Gráfico da força hidrodinâmica aplicada nas saias do pistão a 2500 rpm e com o conjunto de parâmetros originais do motor .....	142
Figura 64. Gráfico da força inercial na direção $y$ devido a massa do pistão a 2500 rpm e com os parâmetros originais do motor .....	143
Figura 65. Resultado obtido por Zhu et. al (1992) das excentricidades $e_t$ e $e_b$ , e suas respectivas velocidades, a 1000 rpm com combustão.....	144
Figura 66. Gráfico comparativo das excentricidades $e_t$ e $e_b$ entre sistemas com biela de comprimento de 136 mm e de 144 mm, com o motor a 2500 rpm.....	145
Figura 67. Gráfico comparativo das velocidades dos pontos $P_t$ e $P_b$ entre sistemas com biela de comprimento de 136 mm e de 144 mm, com o motor a 2500 rpm .....	146
Figura 68. Gráfico comparativo das excentricidades $e_t$ e $e_b$ entre sistemas com biela de comprimento de 152 mm e de 144 mm, com o motor a 2500 rpm.....	147
Figura 69. Gráfico comparativo das velocidades dos pontos $P_t$ e $P_b$ entre sistemas com biela de comprimento de 152 mm e de 144 mm, com o motor a 2500 rpm .....	148
Figura 70. Gráfico comparativo da força de atrito nas saias do pistão entre sistemas com bielas de comprimento de 152 mm, 144mm e 136 mm, com o motor a 2500 rpm.....	149

Figura 71. Gráfico comparativo da força de atrito nas saias do pistão entre sistemas com bielas de comprimento de 152 mm, 144m e 136 mm com o motor a 2500 rpm, na fase de expansão do motor.....	150
Figura 72. Gráfico comparativo da força normal hidrodinâmica aplicada às saias do pistão entre sistemas com bielas de comprimento de 152 mm, 144m e 136 mm, com o motor a 2500 rpm .....	151
Figura 73. Gráfico comparativo da força hidrodinâmica aplicada às saias do pistão entre sistemas com bielas de comprimento de 152 mm, 144m e 136 mm, com o motor a 2500 rpm, na fase de expansão do motor.....	152
Figura 74. Gráfico comparativo das excentricidades $e_t$ e $e_b$ entre sistemas com amplitude de ondulação da superfície da saia de 3,0 $\mu\text{m}$ e de 4,0 $\mu\text{m}$ , com o motor a 2500 rpm.....	153
Figura 75. Gráfico comparativo das velocidades dos pontos $P_t$ e $P_b$ entre sistemas com amplitude de ondulação da sup. da saia de 3,0 $\mu\text{m}$ e de 4,0 $\mu\text{m}$ , com o motor a 2500 rpm.....	154
Figura 76. Gráfico comparativo das excentricidades $e_t$ e $e_b$ entre sistemas com amplitude de ondulação da superfície da saia de 3,0 $\mu\text{m}$ e de 4,0 $\mu\text{m}$ , com o motor a 2500 rpm.....	155
Figura 77. Gráfico comparativo das velocidades dos pontos $P_t$ e $P_b$ entre sistemas com amplitude de ondulação da sup. da saia de 2,0 $\mu\text{m}$ e de 4,0 $\mu\text{m}$ , com o motor a 2500 rpm.....	156
Figura 78. Gráfico comparativo da força de atrito nas saias do pistão entre sistemas com amplitude de ondulação da superfície da saia de 2,0 $\mu\text{m}$ , de 3,0 $\mu\text{m}$ e de 4,0 $\mu\text{m}$ , com o motor a 2500 rpm .....	157
Figura 79. Gráfico comparativo da força de atrito nas saias do pistão entre sistemas com amplitude de ondulação da superfície da saia de 2,0 $\mu\text{m}$ , de 3,0 $\mu\text{m}$ e de 4,0 $\mu\text{m}$ , com o motor a 2500 rpm, na fase de expansão do motor .....	158
Figura 80. Gráfico comparativo da força hidrodinâmica aplicada nas saias do pistão entre sistemas com amplitude de ondulação da superfície da saia de 2,0 $\mu\text{m}$ , de 3,0 $\mu\text{m}$ e de 4,0 $\mu\text{m}$ , com o motor a 2500 rpm .....	159

Figura 81. Gráfico comparativo das excentricidades $e_t$ e $e_b$ entre sistemas com <i>off-set</i> de pino de 0,2 mm e 0,5 mm, com o motor a 2500 rpm .....	160
Figura 82. Gráfico comparativo das velocidades dos pontos $P_t$ e $P_b$ entre sistemas com <i>off-set</i> de pino de 0,2 mm e 0,5 mm com o motor a 2500 rpm .....	161
Figura 83. Gráfico comparativo das excentricidades $e_t$ e $e_b$ entre sistemas com <i>off-set</i> de pino de 0,8 mm e 0,5 mm, com o motor a 2500 rpm .....	162
Figura 84. Gráfico comparativo das velocidades dos pontos $P_t$ e $P_b$ entre sistemas com <i>off-set</i> de pino de 0,8 mm e 0,5 mm, com o motor a 2500 rpm .....	163
Figura 85. Gráfico comparativo da força de atrito nas saias do pistão entre sistemas com <i>off-set</i> de pino de 0,2 mm, 0,5 mm e 0,8 mm, com o motor a 2500 rpm ..	164
Figura 86. Gráfico comparativo da força de atrito nas saias do pistão entre sistemas com <i>off-set</i> de pino de 0,2 mm, 0,5 mm e 0,8 mm, com o motor a 2500 rpm, na fase de expansão .....	165
Figura 87. Gráfico comparativo da força hidrodinâmica aplicada nas saias do pistão entre sistemas com <i>off-set</i> de pino de 0,2 mm, 0,5 mm e 0,8 mm, com o motor a 2500 rpm .....	166
Figura 88. Gráfico dos resultados obtidos da equação de Poisson.....	181
Figura 89. Gráfico do valor do ponto $u(4,6)$ em função do número de iterações.....	182
Figura 90. Distribuição de pressão obtida analiticamente .....	184
Figura 91. Distribuição de pressão obtida numericamente .....	185
Figura 92. Gráfico dos resultados obtidos da força de atrito hidrodinâmico e do tempo de processamento em função do número de pontos .....	188
Figura 93. Gráfico da pressão hidrodinâmica ao longo da superfície da saia do pistão calculada com uma malha de 12x12 pontos. ....	188
Figura 94. Instabilidade da aceleração do pistão na direção $z$ sem a utilização de filtro .....	191
Figura 95. Resultado obtido por Zhu et. al (1992) para as excentricidades $e_t$ e $e_b$ , e suas respectivas velocidades, a 1000 rpm, sem combustão .....	194
Figura 96. Gráfico das excentricidades $e_t$ e $e_b$ , a 1000 rpm e sem combustão .....	195

Figura 97. Gráfico das velocidades dos pontos Pt e Pb a 1000 rpm e sem combustão	195
Figura 98. Resultado obtido por Zhu et. al (1992) da força de atrito a 1000 rpm sem combustão	196
Figura 99. Gráfico da força de atrito na saia do pistão a 1000 rpm e sem combustão	197

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Ficha técnica do motor .....	37
Tabela 2. Comprimentos de biela avaliados.....	136
Tabela 3. Folgas radiais entre o pistão e o cilindro avaliadas .....	136
Tabela 4. <i>Off-set</i> do pino do pistão avaliados .....	137
Tabela 5. Resultados da equação de Poisson obtidos analiticamente.....	179
Tabela 6. Resultados da equação de Poisson obtidos numericamente .....	181
Tabela 7. Pressão hidrodinâmica obtida analiticamente .....	183
Tabela 8. Número de pontos das malhas avaliadas.....	187
Tabela 9. Dados de entrada para validação da rotina.....	193



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ANFAVEA	Associação Nacional dos Fabricantes de Veículos Automóveis
EDP	Equação diferencial parcial
NVH	Noise, vibration and harshness
PME	Pressão média efetiva
PMEF	Pressão média efetiva de freio
PMI	Ponto morto inferior
PMS	Ponto morto superior
RMS	Root mean square
SAE	Society of Automotive Engineers
SOR	Successive overrelaxation
TC	Top Center

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$	Distância na direção $y$ entre a parte superior da saia e o ponto A [m]	96
$A$	Ponto localizado no centro do furo para pino do pistão	96
$AP$	Matriz dos termos dependentes de $p_{j,i}$	123
$a_h$	Relação entre as espessuras $h_1$ e $h_2$	81
$a_{pis}^z$	Aceleração do ponto B na direção $z$ [ $m/s^2$ ]	104
$a_{pin}^z$	Aceleração do ponto A na direção $z$ [ $m/s^2$ ]	104
$a_y$	Aceleração do ponto A na direção $y$ [ $m/s^2$ ]	102
$b$	Distância do centro de gravidade do pistão ao ponto Pt [m]	96
$bp$	Vetor dos termos independentes de $p_{j,i}$	123
$B$	Ponto localizado no centro de gravidade do pistão	96
$C$	Folga radial nominal do pistão [m]	110
$C_g$	Distância na direção $z$ do ponto A ao ponto B [m]	96
$C_p$	Offset do pistão [m]	96
$DP$	Diagonal principal da matriz A	123
$e_b$	Excentricidade do ponto Pb [m]	95
$\dot{e}_b$	Velocidade na direção $z$ do ponto Pb [m/s]	112
$\ddot{e}_b$	Aceleração na direção $z$ do ponto Pb [ $m/s^2$ ]	105
$e_t$	Excentricidade do ponto Pt [m]	95
$\dot{e}_t$	Velocidade na direção $z$ do ponto Pt [m/s]	112
$\ddot{e}_t$	Aceleração na direção $z$ do ponto Pt [ $m/s^2$ ]	105
$E'$	Módulo de elasticidade efetivo [Pa]	90
$E_1$	Módulo de elasticidade do pistão [Pa]	130
$E_2$	Módulo de elasticidade do cilindro [Pa]	131
$F$	Força normal na saia do pistão [N]	104
$f(\theta, y)$	Perfil da saia do pistão [m]	110
$F_{ah}$	Força de atrito hidrodinâmico [N]	103
$F_{ac}$	Força de atrito de contato [N]	103

$F_{at}$	Força de atrito na saia do pistão [N]	103
$F_b$	Força da biela [N]	103
$F_c$	Força normal devido ao contato [N]	104
$F_{comb}$	Força da combustão dos gases [N]	103
$F_h$	Força normal devido à pressão hidrodinamica [N]	104
$F_s$	Forças de combustão e inerciais do pino e do pistão [N]	105
$F_z$	Forças na direção z [N]	104
$F_{IK}^z$	Força de inércia do pistão na direção z [N]	106
$F_y$	Forças na direção y [N]	102
$F_{IK}^y$	Força de inércia do pistão na direção y [N]	106
$h$	Espessura do filme lubrificante [m]	79
$h^*$	Espessura do filme no ponto onde o gradiente de pressão é zero [m]	81
$\bar{h}$	Espessura média do filme de óleo [m]	108
$\bar{h}'_1$	Espessura do filme no pico da rugosidade [m]	86
$\bar{h}'_2$	Espessura do filme no vale da rugosidade [m]	86
$h'_1$	Espessura do filme no pico da ondulação [m]	86
$h'_2$	Espessura do filme no vale da ondulação [m]	86
$H1$	Coordenada y da superfície inferior [m]	78
$h_1$	Espessura do filme de óleo no início da superfície [m]	81
$H2$	Coordenada y da superfície superior [m]	78
$h_2$	Espessura do filme de óleo no final da superfície [m]	81
$h_T$	Espessura local do filme lubrificante [m]	83
$i$	Coordenada da malha no eixo x	121
$I_{pis}$	Mom. de inércia do pistão em relação ao C.G. do pistão [kgm <sup>2</sup> ]	106
$j$	Coordenada da malha no eixo y	121
$l$	Distância entre os centros dos olhais da biela [m]	58
$L$	Altura da saia do pistão [m]	96
<b>LP</b>	Parte inferior da matriz A	123
$M$	Momento das forças normais a saia do pistão [Nm]	106
$M_{ah}$	Momento devido ao atrito hidrodinamico [Nm]	106

$M_{ac}$	Momento devido ao atrito de contato [Nm]	106
$M_{at}$	Momento das forças de atrito na saia do pistão [Nm]	106
$M_c$	Momento devido ao contato [Nm]	106
$M_h$	Momento devido a pressão hidrodinâmica [Nm]	106
$M_o$	Momentos em torno do eixo do pistão [Nm]	106
$m_{pin}$	Massa do pino [kg]	103
$m_{pis}$	Massa do pistão [kg]	103
$M_s$	Momentos provenientes da combustão e inércia do pistão [Nm]	107
$m_T$	Massa total do conjunto pistão e pino [kg]	102
$n$	Rotação do motor [rpm]	44
$N_e$	Potência efetiva [W]	45
$N_i$	Potência indicada [W]	45
$p$	Pressão hidrodinâmica local [Pa]	121
$\mathbf{p}$	Vetor das pressões $p_{j,i}$ que definem a resolução da malha	123
$\mathbf{p}^{(r)}$	Vetor das pressões $p_{j,i}$ após 'r' iterações	123
$Pb$	Ponto do centro do pistão com coord. y da base da saia do pistão	88
$Pt$	Ponto do centro do pistão com coord. y do topo da saia do pistão	88
$p_{cil}$	Pressão interna na câmara [N/m]	45
$p_h$	Pressão hidrodinâmica [Pa]	78
$p_{pis}^z$	Coordenada z do ponto B [m]	104
$p_w$	Força de contato por unidade de comprimento [N/m]	90
$\bar{p}_w$	Pressão de contato para unidade de comprimento [N/m <sup>3</sup> ]	91
$P_w$	Força de contato por unidade de comprimento [N/m]	126
$q$	Largura da metade da área de contato [m]	90
$Q$	Fluxo de calor [W]	46
$Q_1$	Quantidade de calor fornecida [W]	46
$Q_2$	Quantidade de calor cedido ao fim do ciclo [W]	46
$r$	Raio da árvore de manivelas [mm]	58
$R$	Raio do pistão [m]	96
$Re$	Número de Reynolds	78

$t$	Tempo [s]	77
$T$	Torque do motor [Nm]	44
$T_1$	Temperatura no início da compressão [K]	47
$T_2$	Temperatura no fim da compressão [K]	47
$T_3$	Temperatura após a explosão [K]	47
$T_4$	Temperatura no fim da expansão [K]	47
$TA$	Termo da eq. de pressão hidrodinâmica para resolução numérica	175
$TB$	Termo da eq. de pressão hidrodinâmica para resolução numérica	175
$TC$	Termo da eq. de pressão hidrodinâmica para resolução numérica	175
$TD$	Termo da eq. de pressão hidrodinâmica para resolução numérica	175
$TE$	Termo da eq. de pressão hidrodinâmica para resolução numérica	175
<b><math>TJ</math></b>	Matriz dos autovalores do método SOR	177
<b>tol</b>	Tolerância definida para o processo de iterações [Pa]	178
<b><math>T\omega</math></b>	Matriz de iteração do método SOR	178
$U$	Vel. relativa entre as duas superfícies separadas pelo filme [m/s]	80
<b><math>UP</math></b>	Parte superior da matriz A	123
$U_1$	Velocidade da superfície inferior na direção x [m/s]	79
$U_2$	Velocidade da superfície superior na direção x [m/s]	79
$u_i$	Velocidade na direção i [m/s]	77
$V$	Volume da câmara [m <sup>3</sup> ]	45
$V_1$	Velocidade da superfície inferior na direção y [m/s]	79
$V_2$	Velocidade da superfície superior na direção y [m/s]	79
$W$	Velocidade na direção z [m/s]	78
$\bar{W}$	Capacidade adimensional de carga	82
$W_2$	Velocidade na direção z perpendicular ao filme [m/s]	79
$W_i$	Trabalho indicado [Nm]	45
$x_0$	Valor de x na fronteira inicial da malha [m]	176
$x_i$	Coordenada do sistema na direção i [m]	77
$Y$	Posição y do pistão dentro do cilindro [m]	101
$\dot{Y}$	Velocidade vertical do pistão [m/s]	101

$\ddot{Y}$	Aceleração vertical do pistão [m/s <sup>2</sup> ]	101
$y_0$	Valor de x na fronteira inicial da malha [m]	176
$z$	Coordenada na direção perpendicular ao filme [m]	78
$\alpha$	Termo da equação que define a pressão hidrodinâmica [m <sup>3</sup> ]	108
$\bar{\alpha}$	Ângulo na extremidade das ondulações [°]	90
$\alpha_{pis}$	Aceleração angular do pistão [rad/s <sup>2</sup> ]	106
$\beta$	Termo da equação que define a pressão hidrodinâmica [m <sup>2</sup> ]	108
$\gamma$	Termo da equação que define a pressão hidrodinâmica [m <sup>3</sup> ]	108
$\delta$	Termo da equação que define a pressão hidrodinâmica [m <sup>2</sup> ]	108
$\delta_c$	Deformação local da onda [m]	116
$\Delta x$	Espaçamento da malha na direção x [m]	121
$\Delta y$	Espaçamento da malha na direção y [m]	122
$\varepsilon$	Termo da equação que define a pressão hidrodinâmica [Pa]	108
$\eta$	Ângulo entre as duas superfícies separadas pelo filme [°]	81
$\ddot{\eta}$	Aceleração angular do pistão [rad/s <sup>2</sup> ]	107
$\eta_g$	Rendimento global do motor	46
$\eta_t$	Rendimento térmico do motor	46
$\eta_m$	Rendimento mecânico do motor	46
$\theta$	Posição angular na saia do pistão [rad]	96
$\theta_1$	Limite da saia de pressão do pistão [rad]	96
$\theta_2$	Limite da saia de contra pressão do pistão [rad]	96
$\mu$	Viscosidade do fluido lubrificante [Ns/m <sup>2</sup> ]	78
$\mu_c$	Coeficiente de atrito de contato	118
$\rho$	Massa específica do fluido [kg/m <sup>3</sup> ]	77
$\rho_{TJ}$	Raio espectral da matriz TJ	177
$\sigma$	Rugosidade da superfície da saia do pistão [m]	86
$\tau$	Tensão de cisalhamento do filme lubrificante [N/m <sup>2</sup> ]	114
$\nu_1$	Coeficiente de Poisson do pistão	130
$\nu_2$	Coeficiente de Poisson do cilindro	131
$\phi$	Ângulo da biela em relação ao eixo do cilindro [°]	95

$\phi_f$	Fator de tensão de cisalhamento do fluido devido a ondulação	114
$\phi_{fs}$	Fator de tensão de cisalhamento do fluido devido a ondulação	114
$\phi_{fp}$	Fator de tensão de cisalhamento do fluido devido a ondulação	114
$\Phi_s$	Fator de cisalhamento do fluxo	84
$\Phi_x$	Fator de fluxo na direção x	84
$\Phi_y$	Fator de fluxo na direção y	84
$\psi$	Posição da árvore de manivelas [ °]	95
$\omega$	Rotação do motor [rad/s]	44
$\omega'$	Ondulação da superfície da saia do pistão [m]	86
$\Omega$	Parâmetro ótimo de relaxação	177

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>26</b>
<b>2</b>	<b>DEFINIÇÃO DO PROBLEMA</b>	<b>30</b>
2.1	Objetivo Geral	34
2.2	Objetivos Específicos	34
2.3	Justificativa	34
<b>3</b>	<b>UNIDADE E OBJETO DE ESTUDO</b>	<b>36</b>
<b>4</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>38</b>
4.1	Ciclos Termodinâmicos	39
4.1.1	Ciclo Padrão-Ar Otto	39
4.1.2	Ciclo Otto real	41
4.2	Análise das Potências do Motor	44
4.2.1	Potência Efetiva (Ne)	44
4.2.2	Potência Indicada (Ni)	44
4.3	Rendimentos do motor	46
4.3.1	Rendimento Global	46
4.3.2	Rendimento Indicado	46
4.3.3	Rendimento Mecânico	47
4.4	Sistema biela manivela e bloco do motor	48
4.4.1	Pistão	48
4.4.2	Biela e árvore de manivelas	56
4.4.3	Bloco do motor	63
4.4.4	Cargas	66
4.5	Metodologias de ensaios	66



4.5.1	Métodos experimentais .....	67
4.5.2	Métodos preditivos .....	73
4.6	Lubrificação .....	74
4.7	Pressão hidrodinâmica .....	76
4.7.1	Equações gerais .....	77
4.7.2	Duas superfícies não paralelas .....	80
4.7.3	Efeito da rugosidade das superfícies .....	83
4.8	Pressão de contato .....	88
4.8.1	Pressão de contato na superfície do pistão .....	89
<b>5</b>	<b>METODOLOGIA .....</b>	<b>92</b>
5.1	Pressupostos .....	93
<b>6</b>	<b>DESCRIÇÃO DO SISTEMA .....</b>	<b>94</b>
6.1	Coordenadas do sistema .....	94
6.2	Considerações realizadas .....	97
<b>7</b>	<b>MODELO MATEMÁTICO .....</b>	<b>100</b>
7.1	Cinemática do pistão .....	100
7.2	Sistema de equações diferenciais .....	102
7.2.1	Forças excitantes .....	102
7.2.2	Momentos excitantes .....	106
7.2.3	Pressão hidrodinâmica .....	108
7.2.4	Força normal à saia do pistão – Pressão hidrodinâmica .....	113
7.2.5	Força de atrito Hidrodinâmico: .....	114
7.2.6	Pressão de contato .....	115
7.2.7	Força normal à saia do pistão - Força de contato .....	117
7.2.8	Atrito de contato .....	118

<b>8</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA .....</b>	<b>120</b>
8.1	Rotinas de Cálculo .....	120
8.1.1	Pressão Hidrodinâmica .....	120
8.1.2	Força Hidrodinâmica e Atrito Hidrodinâmico .....	124
8.1.3	Atrito de Contato .....	126
8.2	Sistema de equações diferenciais .....	127
<b>9</b>	<b>SIMULAÇÃO E ANÁLISE .....</b>	<b>132</b>
9.1	Dados de entrada .....	132
9.1.1	Dados iniciais .....	132
9.1.2	Parâmetros analisados .....	134
9.2	Resultados .....	138
9.2.1	Conjunto original de parâmetros .....	138
9.2.2	Análise paramétrica .....	145
<b>10</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>167</b>
<b>11</b>	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>171</b>
<b>Apêndice A – Método numérico para cálculo da pressão hidrodinâmica .....</b>		<b>174</b>
<b>Apêndice B – Avaliação do tamanho da malha de pontos que define a área da saia do pistão .....</b>		<b>186</b>
<b>Apêndice C – Resolução numérica da equação para cálculo da pressão de contato .....</b>		<b>189</b>
<b>Apêndice D – Características numéricas do modelo de simulação .....</b>		<b>191</b>
<b>Apêndice E – Validação da rotina numérica implementada .....</b>		<b>193</b>
<b>Apêndice F – Códigos de programação .....</b>		<b>198</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento das grandes metrópoles e o aumento da dependência dos meios de transporte motorizados têm gerado um crescimento na frota mundial de veículos. De acordo com a ANFAVEA<sup>1</sup> (2007) a produção de veículos no Brasil cresceu 45% desde 2002. Junto com esta tendência, o aumento do consumo das fontes de energia e recursos naturais é inevitável.

Com o intuito de amenizar o impacto ambiental gerado pela exploração dessas fontes não renováveis, alternativas para reduzir o seu consumo, principalmente de petróleo, estão sendo desenvolvidas. A utilização de fontes renováveis, como é o caso do álcool e da energia solar, pode ser uma solução. “O programa brasileiro de biocombustíveis – produzir o etanol, a partir da cana-de-açúcar, e o biodiesel, de oleaginosas – tem mostrado consistência sob os aspectos técnico, ambiental, comercial e social. Seu potencial de negócio é inestimável [...]” (LIMA, 1997, p.7).

Conjuntamente ao problema de disponibilidade futura de energia, aparece a problemática da emissão de poluentes no ar. Os veículos automotores desempenham um papel fundamental dentro do contexto ambiental, visto que suas emissões são prejudiciais à saúde e ao bem-estar do homem. Braga et al. (2005) destaca “[...] a forte influência dos veículos automotores sobre os processos de poluição nos grandes centros urbanos, os quais tendem a se agravar.” Assim sendo, não há dúvidas que a redução do consumo de combustíveis e de emissão de poluentes deve ser dos focos principais no projeto de novos produtos.

Além disso, o mercado atual de automóveis está cada vez mais competitivo. Há cerca de 15 anos, o conjunto de montadoras com produção nacional era composto por poucas empresas. Segundo Salerno (1997), a formação de centros de desenvolvimento de produtos no Brasil estaria descartada, limitando o país a categoria de pólo de fabricação de veículos. Porém, o que se observa atualmente vai muito além de simples adaptações de produtos. A entrada de novas marcas no

---

<sup>1</sup> Associação Nacional dos Fabricantes de Veículos Automotores

cenário automotivo acelerou o desenvolvimento de novas tecnologias que trouxessem melhorias no rendimento dos automóveis. Os veículos bi-combustível fizeram do Brasil o país pioneiro nesta tecnologia.

Porém, soluções que reduzam o consumo de combustível e melhorem o desempenho dos veículos geralmente têm impacto no custo final do produto. As tecnologias disponíveis para este fim geram uma sofisticação no motor, que nem sempre são adequadas para o mercado nacional.

Acredita-se que este estudo possa oferecer uma contribuição ao assunto, pois novos produtos obrigatoriamente serão desenvolvidos com este foco. Desta forma, a pesquisa aqui realizada tem o intuito de estudar como reduzir o consumo de combustível, e, conseqüentemente, a emissão de poluentes nos motores, através de soluções economicamente viáveis e que reduzam o tempo de avaliação e desenvolvimento. O estudo foi, então, orientado pela seguinte vertente do problema de pesquisa: Como melhorar a eficiência mecânica dos motores de combustão interna?

Em um motor de combustão interna, nem todo o trabalho, proveniente da expansão dos gases no interior da câmara e transferido para o topo do pistão, estará disponível no eixo do motor, para ser efetivamente utilizado. Isso ocorre, pois parte do trabalho se perde na forma de atrito. Esta dissipação está associada a diversas formas de perdas quer no motor, quer em sistemas periféricos, como o ar condicionado e a direção hidráulica.

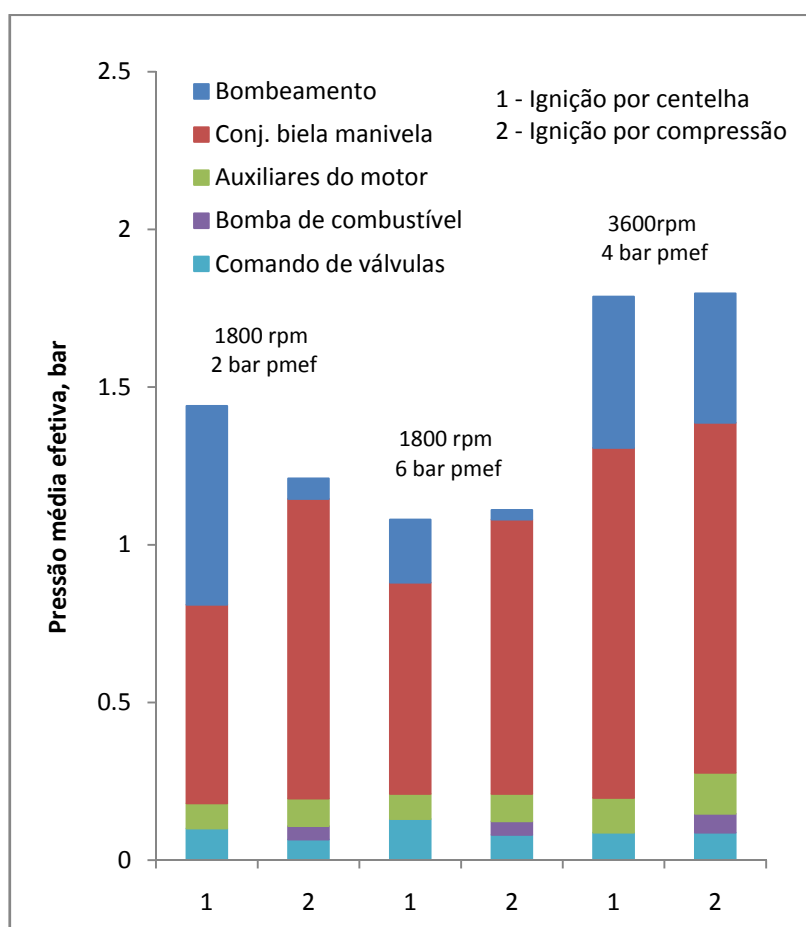
Esta parcela de trabalho não aproveitada afeta diretamente o consumo de combustível, os valores máximos de torque e de potência do motor e, conseqüentemente, o desempenho veicular final. De acordo com Heywood (1988), as perdas por atrito são frações grandes da potência total do motor, variando de 10%, para condições de plena carga, até próximo de 100%, nas condições de marcha lenta do motor. Assim, não restam dúvidas acerca da importância deste campo de pesquisa.

Tendo em conta a grande influência que esta questão possui na eficiência do motor de combustão, não é errado afirmar que a diferença entre um bom projeto de motor e um projeto ruim ou mediano pode estar, e muitas vezes está, nas perdas mecânicas existentes. Seu impacto pode, algumas vezes, ir além da questão do

consumo de combustível e emissão de poluentes. Como as perdas aqui tratadas, em sua grande maioria, se transformam em calor, o sistema de arrefecimento do motor pode ser afetado, tornando-se maior e mais caro.

Outro aspecto que também pode ser relatado é a dirigibilidade do veículo. Motores de menor volume deslocado por ciclo, como por exemplo os motores de 1,0 litro, recebem maior influência relativa de suas perdas mecânicas. Tendo em conta seu menor desempenho, variações na parcela dissipada por atrito são normalmente mais perceptíveis. Por este motivo, ações na aplicação do motor podem ser necessárias para minimizar estes efeitos.

A Figura 1 apresenta uma comparação das perdas por atrito provenientes do conjunto pistão, biela e manivela, da bomba de combustível, do eixo comando de válvulas e dos periféricos. Tal comparação é feita em motores de 1,6 litros de quatro cilindros com ignição por centelha e por compressão.



**Figura 1. Comparativo das formas de perdas por atrito de um motor de ignição por centelha e um motor de ignição por compressão.**

Fonte: HEYWOOD, J.: 1988, p.713

Neste estudo, o motor foi analisado em três diferentes condições, variando-se rotação e carga, indicada através da pressão média efetiva do freio dinamométrico (PMEF). Verifica-se que existem condições onde as perdas por atrito atingem cerca de 75% do trabalho exercido no eixo do motor.

É possível perceber que a principal parcela de perdas mecânicas existentes nos motores de combustão são provenientes do conjunto motriz, composto por pistão, biela e manivela. Assim, trabalhos e pesquisas realizados sobre este tema, abordam, geralmente, questões relacionadas a este conjunto. Mansouri (2004), com base no modelo matemático desenvolvido por Zhu (1992), apresenta em seu trabalho uma análise do impacto do perfil do pistão e de seu acabamento superficial no atrito existente entre a saia do pistão e o cilindro do motor. Já Wakabayashi (2003) desenvolve um estudo experimental sobre a influência do *offset* da árvore de manivelas nas perdas por atrito.

Outro trabalho interessante foi realizado na Toyota e apresentado por Adachi (1998) sobre o desenvolvimento de um de seus motores. Diversas alterações foram propostas, aplicadas e analisadas de modo a permitir atingir objetivos de redução de emissões de gases, de ruído, de peso e de consumo de combustível. Dentre tais modificações, encontram-se a otimização da tensão nos anéis do pistão e a otimização do curso do pistão, bem como a redução das massas oscilantes do motor, de modo a aumentar a eficiência mecânica do conjunto.

Tem-se, então, uma alternativa para atingir os objetivos de redução de consumo de combustível e emissão de poluentes, assim como para contornar o problema de custo e maximizar o aproveitamento de energia disponível no combustível, reduzindo as perdas de energia através de atrito. Pretende-se, aqui, estudar e atuar no mecanismo e na dinâmica do conjunto biela-manivela do motor, alterando alguns parâmetros, tais como comprimento de biela, *offset* do pistão e acabamento superficial do pistão. Mais especificamente, o trabalho é realizado com foco na dinâmica do pistão e nas perdas existentes no contato existente entre ele e o cilindro do motor. Tais alterações acarretariam num investimento inicial para adequar o produto, porém o preço final se manteria inalterado.

## 2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Como já mencionado, as perdas por atrito de um motor, ou o chamado trabalho de atrito, podem ser definidas como a diferença entre o trabalho fornecido ao topo do pistão, pela expansão dos gases durante a combustão, e o trabalho disponível em seu eixo principal. No entanto, cabe aqui distinguir as diferentes formas em que ocorrem.

Embora não sejam as mais expressivas, as perdas de bombeamento de ar são talvez as mais características de um motor de combustão interna. Isto ocorre, pois, para renovar o ar de dentro dos cilindros é necessário expelir os gases queimados, bem como admitir ar fresco da atmosfera. A restrição imposta ao fluxo de ar, seja pelo sistema de escapamento do motor, seja pelo sistema de admissão, contribui em tais perdas mecânicas.

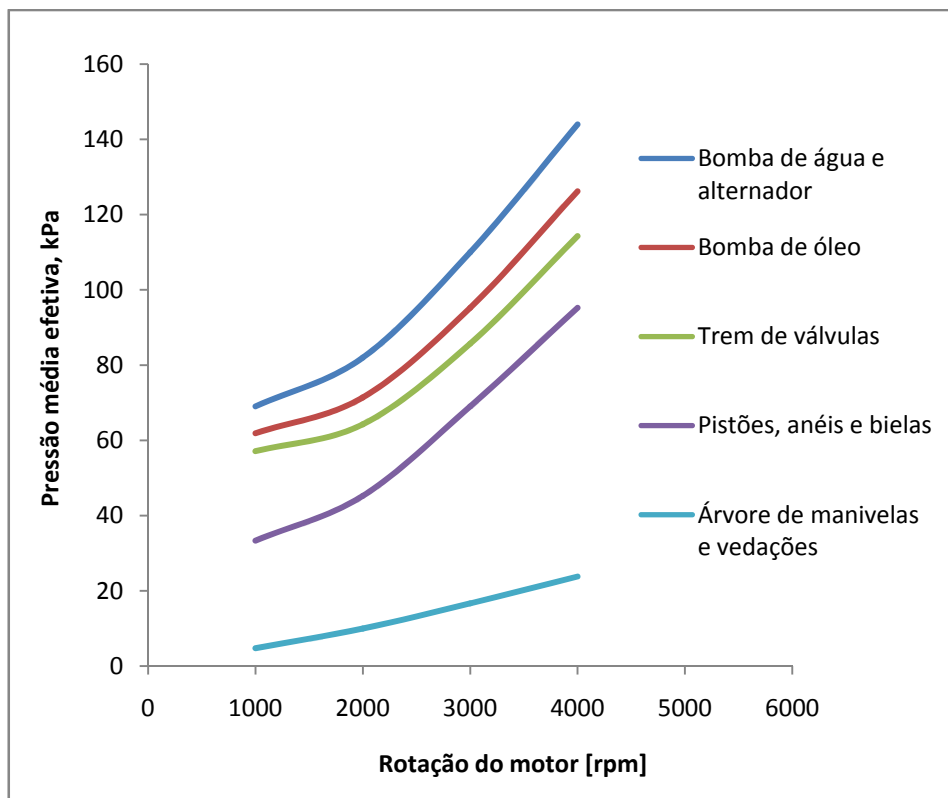
A segunda e menos influente delas é a relacionada aos acessórios do motor. Podemos incluir aqui o ventilador do motor, as bombas de água e óleo, alternador, bomba de direção hidráulica e compressor do ar condicionado. Apesar dos acessórios citados também produzirem calor e gerarem perdas próprias por atrito, a principal parcela do trabalho do motor aqui roubado possui ao menos uma função aplicada. Ou seja, mesmo que reduzam o trabalho útil do motor, possuem finalidade específica, como carregar a bateria, regular o conforto térmico no interior do veículo ou reduzir o esforço no volante do veículo.

Finalmente tem-se a mais expressiva dentre as formas de perdas mecânicas do motor. Trata-se da resistência existente para movimentar todas as suas partes móveis. Inclui-se, aqui, o atrito entre os anéis do pistão e a parede do cilindro, entre a saia do pistão e a parede do cilindro, bem como o atrito nos mancais do motor e no comando de válvulas.

O valor absoluto destas perdas varia, portanto, com a carga e com a rotação do motor. Desta forma é esperado que em rotações e cargas maiores, este tipo de perda seja mais evidenciado.

A Figura 2 apresenta um comparativo interessante entre as principais fontes de atrito dos componentes internos do motor em função da rotação. Estes valores

foram obtidos com a movimentação do motor sem ocorrência de combustão. Como será analisado a seguir, esta não é a técnica mais precisa para determinar valores absolutos de potência de atrito de componentes tais como bielas, mancais do virabrequim e pistão, tendo em vista que a maior parcela de suas perdas ocorre durante a combustão. Mesmo assim, trata-se de uma forma rápida de comparação.



**Figura 2. Comparativo das principais fontes de atrito internas do motor sem a ocorrência de combustão.**

Fonte: HEYWOOD, J.: 1988, p.726

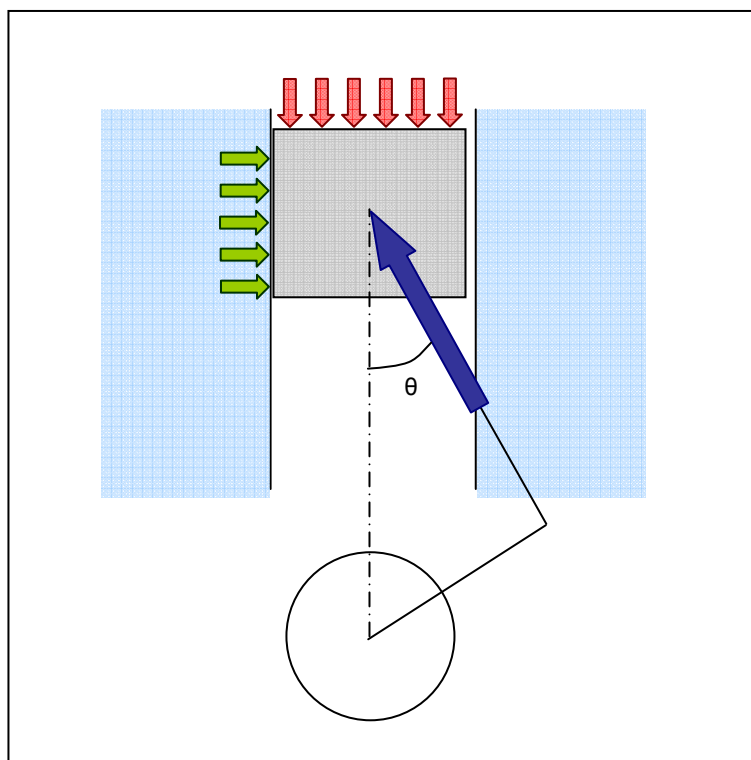
Estes resultados mostram que a principal parcela das perdas por atrito é referente ao conjunto pistão e anéis, sendo responsável por aproximadamente 50% do total. De acordo com TAYLOR (1971), o atrito existente entre a saia do pistão e o cilindro do motor representa praticamente metade das perdas provenientes deste conjunto, ou seja cerca de 20% do total de perdas por atrito no motor.

O pistão, em um motor alternativo de combustão, possui uma movimentação secundária e perpendicular ao seu movimento principal ao longo do cilindro. Embora pequeno, trata-se de um movimento oscilatório muito importante na confiabilidade, bem como no rendimento do motor. Afeta não só as perdas por atrito, mas também o consumo de óleo do motor e seus níveis de ruído e vibração.



Tais efeitos dinâmicos são consequências da característica do mecanismo de movimentação do pistão. Como a biela varia a sua inclinação em relação ao eixo de movimento, o pistão é pressionado contra a parede do cilindro gerando as perdas por atrito. A existência de uma folga de montagem, propicia ao pistão movimentar-se de um lado para o outro do cilindro de acordo com a posição da biela, bem como girar em torno de seu pino de fixação. Este movimento, aliado à força de combustão exercida em seu topo, intensifica a influência da saia do pistão no rendimento do motor e, conseqüentemente, no consumo de combustível.

A imagem de um instante onde a posição da biela e a pressão de combustão geram uma componente perpendicular ao eixo do cilindro é apresentada no esquema da Figura 3. A intensidade da força de atrito existente entre a saia do pistão e o cilindro é diretamente proporcional a esta componente. Características de construção do conjunto, como comprimento da biela, folga de montagem, geometria e massa do pistão, afetam diretamente este fenômeno.



**Figura 3. Pressão de combustão atuando no topo do pistão**

Fonte: Elaborado pelo autor.

Não há dúvidas de que compreender a dinâmica do pistão dentro do cilindro é fundamental para aperfeiçoar o seu funcionamento, seja reduzindo o atrito, seja

reduzindo os efeitos vibratórios no motor. No entanto, como será apresentado adiante neste trabalho, experimentos que indiquem com precisão as variações na força exercida pelo pistão na parede do cilindro são onerosos e de complexa execução. Poucos são os laboratórios capazes de realizá-las nas condições de funcionamento do motor. Além disso, uma bancada para este tipo de ensaio não é facilmente adaptável de um motor para outro, limitando suas possibilidades de atuação.

Uma excelente alternativa para análise e compreensão da dinâmica do pistão, assim como dos fenômenos que ocorrem em sua saia, é a modelagem numérica. A partir da implementação de um modelo capaz de simular o mecanismo do conjunto pistão, biela e manivela, é possível avaliar diversas alternativas de melhoria, analisando seus prós e contras, em um período de tempo muito menor.

Desde a década de 1960, quando Griffiths (1964) iniciou estudos referentes à maneira com que ocorrem os impactos entre o pistão e a parede do cilindro, o desenvolvimento de um modelo preditivo da dinâmica do pistão começou a ser perseguido. Tais modelos evoluíram com o passar dos anos e, com o desenvolvimento de métodos numéricos e computacionais, tornaram-se confiáveis e representativos.

Além de implementar um modelo representativo da dinâmica do pistão, o ponto chave do problema em questão é definir a maneira com que o pistão reage na interação com a superfície do cilindro. Considerando os elevados esforços envolvidos e sua rápida variação no tempo, a lubrificação oscila entre totalmente hidrodinâmica e elastohidrodinâmica. Ou seja, existem momentos durante o ciclo de funcionamento do pistão em que ocorre o contato de metal com metal.

Somente após melhor entendimento do fenômeno e de suas características é possível obter um modelo robusto e confiável. Sendo assim, com a implementação deste modelo iniciam-se as avaliações pertinentes quanto às características do sistema e sua influência no fenômeno aqui estudado.

## 2.1 Objetivo Geral

Como objetivo geral do estudo, pretende-se estudar o efeito do atrito existente entre a saia do pistão e o cilindro do motor através da análise paramétrica de características do conjunto pistão, biela e manivela. Tal análise é realizada através da implementação de um modelo matemático que fora anteriormente desenvolvido e testado por Zhu (1992). Melhorando a resposta dinâmica do pistão busca-se aumentar o rendimento do motor, reduzindo o consumo de combustível.

## 2.2 Objetivos Específicos

Quanto aos objetivos específicos busca-se:

- estudar modelos e trabalhos já desenvolvidos anteriormente;
- analisar a necessidade de eventuais alterações;
- implementar o modelo através de uma rotina de cálculo numérico;
- analisar a influência do comprimento de biela no atrito do pistão;
- analisar a influência do acabamento superficial da saia do pistão em seu atrito;
- analisar a influência do *off-set* do pino do pistão em seu atrito.

## 2.3 Justificativa

Como mencionado, o consumo de combustível e o desempenho dos motores são assuntos eminentes. Para atender às expectativas do consumidor e manter o produto competitivo, são necessárias melhorias constantes. Uma das consequências de não desenvolver alternativas que melhorem os motores é a perda de mercado ao longo do tempo.

O texto busca entender como melhorar o rendimento mecânico dos motores já existentes, realizando modificações as quais não acarretem em alteração significativa no custo final do produto. As formas de contribuição do conjunto pistão, biela e manivela na redução das perdas por atrito são estudadas, tendo em vista ser ela uma das mais expressivas parcelas.

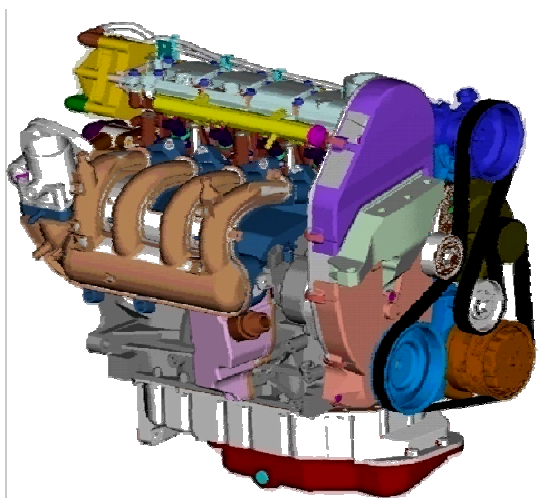
A execução do estudo não acarretou custos elevados, uma vez que não foram necessários muitos recursos materiais. Todo seu desenvolvimento foi fundamentado em teorias, experiências anteriores, modelos matemáticos e em *softwares* já existentes e disponíveis. Como resultado do trabalho, além dos resultados obtidos com a análise paramétrica do fenômeno, obteve-se um modelo matemático implementado e testado, à disposição para novos projetos e estudos no tema.

### 3 UNIDADE E OBJETO DE ESTUDO

Este estudo foi realizado na Engenharia de Projeto de Motores do Departamento de Planejamento e Desenvolvimento do Produto da Volkswagen do Brasil, no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Engenharia Automotiva da Escola Politécnica.

O objeto de estudo deste trabalho é o motor EA111 de 1,4 litros; mais especificamente, o seu sistema biela manivela, responsável pela conversão do movimento retilíneo e alternado do pistão em movimento rotativo. Podem-se destacar quatro componentes a serem analisados: pistão, biela, árvore de manivelas e bloco do motor.

A escolha por este motor se deve, basicamente, a dois motivos. O primeiro está relacionado ao fato de que em motores de grande capacidade volumétrica e valores de potências máximas maiores, a influência das forças de atrito é menos relevante, ao contrário do que se observa com motores menores. O segundo motivo está associado a possuir o motor 1,4 litros em questão geometria que permite eventuais alterações em suas características, sem grandes complicações. Assim, trata-se de um motor relativamente pequeno e com potencial de melhorias no que tange à questão aqui abordada.



**Figura 4. Objeto de estudo - Motor EA111  
1,4 litros**

Fonte: Elaborado pelo autor

Os principais dados técnicos deste motor, tais como potência, torque e taxa de compressão, são apresentados na tabela abaixo. Maiores detalhes e características relevantes à resolução deste trabalho são apresentados ao longo do texto.

**Tabela 1. Ficha técnica do motor**

VW - EA111 1,4I – FICHA TÉCNICA		
Modelo	EA111 1,4I Total Flex	
Disposição / Cilindros	Linha / 4	
Válvulas por cilindro	2	
Diâmetro x Curso	mm x mm	76,5 x 75,6
Capacidade volumétrica	cm³	1389
Taxa de compressão	11,0:1	
Emissões	Proconve L5	
Gasolina		
Potência	kW	57,0
Rotação pot. máx.	rpm	4800
Torque	Nm	123,0
Rotação tor. máx.	rpm	3500
Álcool		
Potência	kW	59,0
Rotação pot. máx.	rpm	4800
Torque	Nm	125,0
Rotação tor. máx.	rpm	3500

## 4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O objetivo desta revisão bibliográfica é fornecer uma fundamentação teórica sobre os tópicos relacionados ao desenvolvimento e objetivo deste trabalho, bem como apresentar um panorama da evolução das pesquisas e metodologias já aplicadas. Neste capítulo são tratados conceitos básicos, a partir do estudo de publicações que abordam tópicos de interesse.

Inicialmente são apresentados os principais conceitos relacionados ao funcionamento do motor e às suas características funcionais e construtivas, principalmente aquelas relacionadas à dinâmica do pistão e de seu mecanismo. Desta forma, faz-se necessária a definição do ciclo de funcionamento do motor, de modo a permitir a completa compreensão dos fenômenos externos que atuam no conjunto pistão, biela e manivela. Conceitos como os de rendimentos do motor também são abordados, de modo a facilitar a posterior discussão sobre o assunto. São também apresentadas as principais características dos componentes envolvidos, bem como suas influências no bom funcionamento do motor.

Em seguida, são apresentadas metodologias aplicadas na determinação das perdas por atrito do conjunto pistão e biela, bem como do motor como um todo. São analisados métodos experimentais, bem como modelos matemáticos já desenvolvidos. Tais métodos e trabalhos são confrontados de modo a expor suas vantagens e desvantagens.

Finalmente, os principais conceitos físicos, que envolvem a implementação do modelo utilizado neste trabalho, são abordados. Entende-se necessária a apresentação do desenvolvimento da equação que determina a pressão hidrodinâmica do filme de óleo entre o pistão e o cilindro, bem como dos conceitos relacionados ao contato seco entre as superfícies das duas peças.

## 4.1 Ciclos Termodinâmicos

### 4.1.1 *Ciclo Padrão-Ar Otto*

O ciclo padrão-ar trata-se de uma abordagem clássica para analisar o funcionamento do motor. Esta abordagem analisa somente efeitos termodinâmicos sem considerar as características mecânicas de um motor real. Embora este não seja o foco do presente trabalho, seu estudo facilita a compreensão do ciclo real apresentado a seguir.

Um ciclo a ar é definido como um processo termodinâmico idealizado, de modo a assemelhar-se ao que ocorre em algum tipo particular de motor correspondente. Como, na realidade, o sistema muda de um ciclo do motor para o outro, o processo não pode ser considerado estritamente cíclico. Para facilitar o estudo e para poder alcançar conclusões qualitativas e até mesmo quantitativas, associa-se a cada ciclo real um ciclo padrão correspondente.

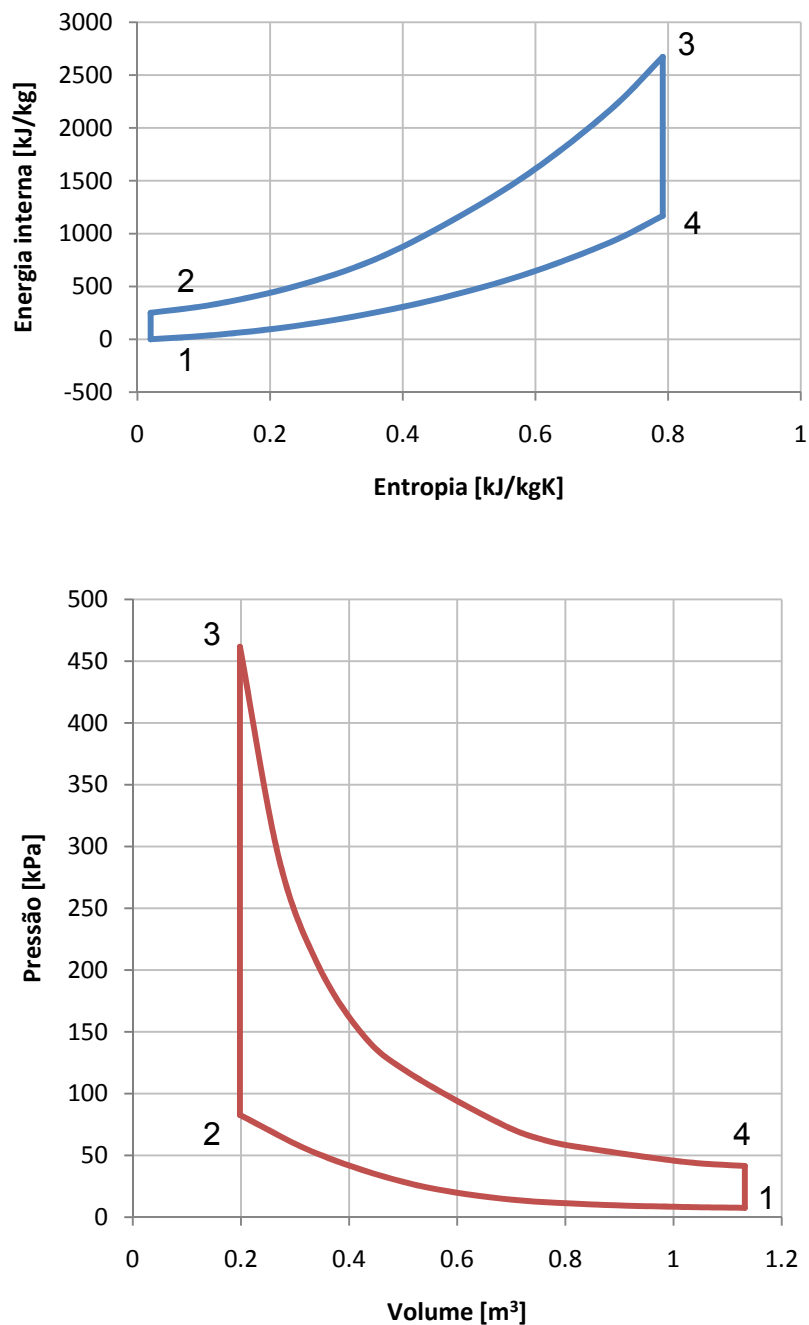
Faz-se necessário estabelecer as seguintes hipóteses:

- o fluido ativo é ar puro;
- o ar é um gás perfeito;
- não há admissão nem escape de gases;
- os processos de compressão são considerados isentrópicos;
- o processo de fornecimento de calor é considerado isocórico;
- o processo de retirada de calor é considerado isocórico;
- todos os processos são considerados reversíveis.

A Figura 5 apresenta os diagramas de temperatura por entropia e pressão por volume do ciclo de ar. Para a condição inicial, tem-se uma massa de ar dentro do cilindro com volume e pressão indicados (Estado 1). Num primeiro momento esta massa sofre compressão isentrópica. A partir do estado 2, calor é adicionado ao sistema, elevando a pressão a volume constante (isocórico), até que seja atingido o estado 3. Em seguida ocorre uma expansão adiabática e reversível (isentrópica)



até o volume inicial. Estas duas últimas etapas correspondem à explosão do combustível e à expansão do cilindro no ciclo real. Por fim, o sistema é resfriado a volume constante até que a sua pressão inicial complete um ciclo.



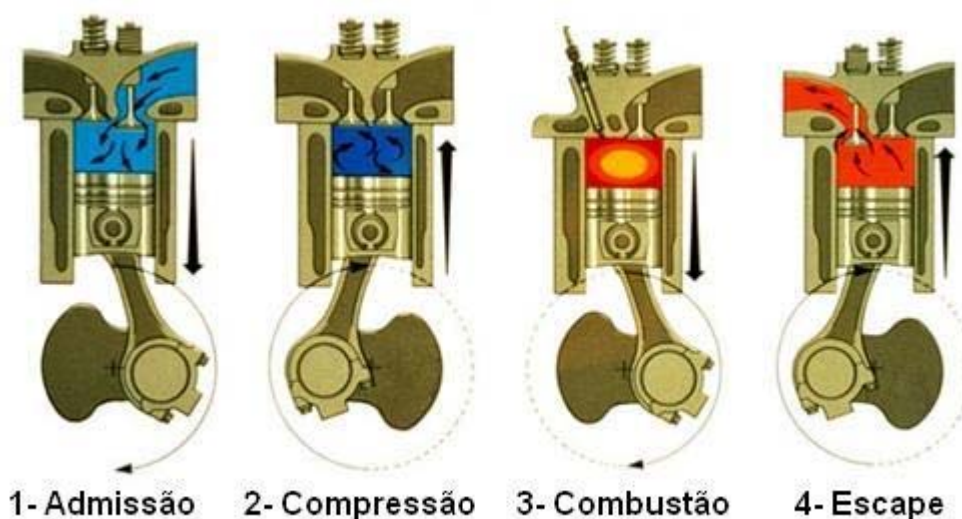
**Figura 5. Ciclo Padrão a Ar**

Fonte: TAYLOR, C.: 1971, p.35 v.1

#### 4.1.2 Ciclo Otto real

Feita a apresentação do ciclo padrão a ar, torna-se possível iniciar o estudo do ciclo Otto real, cujo nome é oriundo de seu inventor Nicolaus Otto, quem construiu o primeiro motor baseado em tais princípios em 1876. Nele, características do sistema de admissão e escape do motor, bem como o real comportamento dos gases no volume da câmara, determinam o comportamento da pressão e energia liberada na câmara de combustão.

No caso de motores alternativos, abordados neste trabalho, o pistão movimenta-se de cima para baixo dentro do cilindro de modo a transferir trabalho ao mecanismo de biela e manivela. Motores de ignição por centelha podem possuir dois ou quatro tempos, dependendo de sua forma de construção. No entanto, este trabalho tratará somente de ciclos de quatro tempos. Para este caso, cada cilindro do motor necessita de quatro cursos do pistão (duas voltas do motor), para completar a seqüência de eventos para o seu funcionamento cíclico. A Figura 6 abaixo apresenta as quatro fases em questão.



**Figura 6. As quatro fases de operação do motor**  
Fonte: <http://www.mecanica.ufrgs.br/mmotor/otto.htm>

A primeira das quatro fases do motor é a admissão. Nela o pistão desloca-se do ponto morto superior (PMS) ao ponto morto inferior (PMI) com a válvula de admissão aberta, de modo que a pressão no interior dentro do cilindro se mantenha

levemente inferior à atmosférica (motores aspirados), admitindo mistura de ar e combustível.

Após a admissão o pistão muda sua direção de movimento e inicia-se a compressão. A válvula de admissão é fechada e o ar anteriormente admitido é comprimido pelo pistão que se desloca do PMI para o PMS. Desta forma o fluido ativo sofre uma diminuição do volume com conseqüente aumento da pressão e da temperatura.

No término da fase de compressão, dá-se a ignição de uma centelha, tendo início, logo a seguir, a combustão da mistura ar/combustível. Neste instante, verifica-se uma elevação acentuada da pressão no interior da câmara. Este fenômeno expande os gases, impulsionando o pistão do PMS até o PMI. Nesta fase as perdas por atrito do conjunto pistão, biela e manivela tornam-se mais significativas. Com a elevada pressão na câmara e esforços necessários para movimentar o pistão e gerar trabalho mecânico, os mancais e superfícies de apoio recebem elevado carregamento, aumentando as perdas.

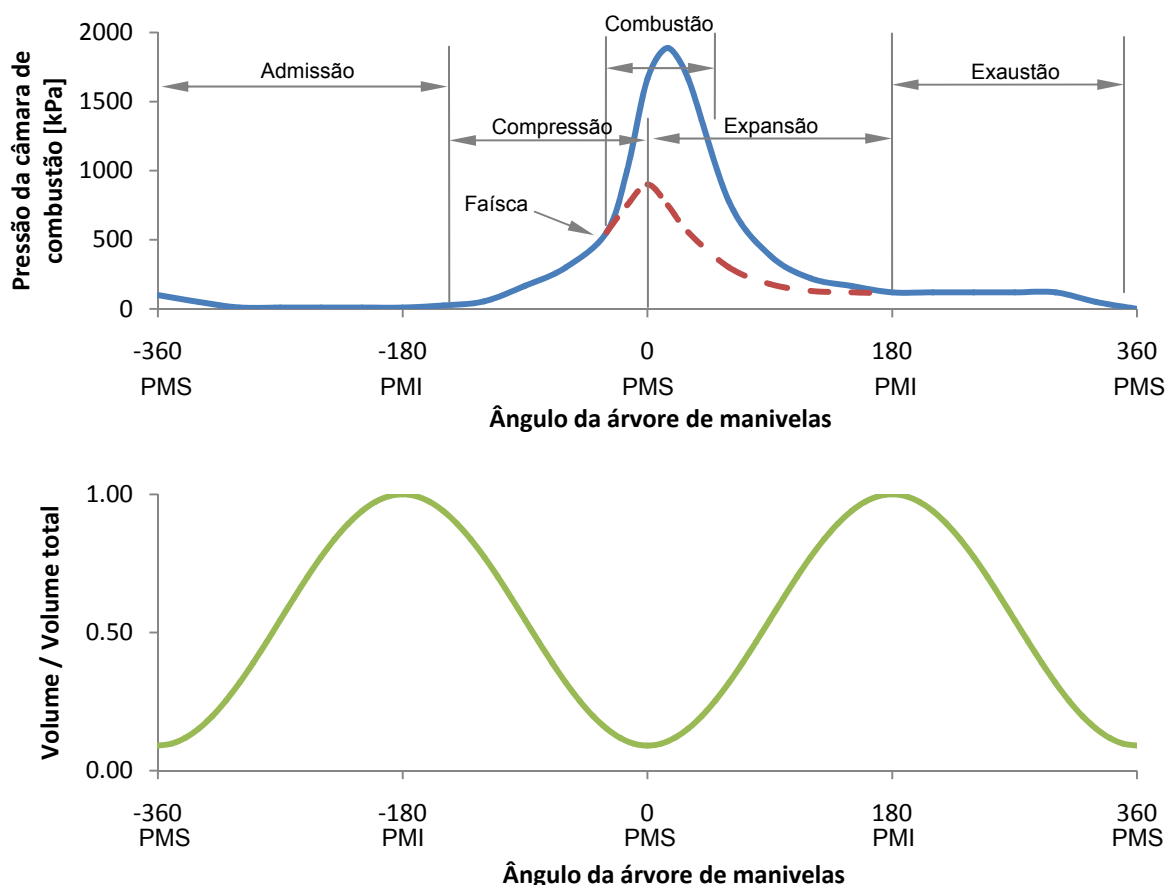
Finalmente dá-se a fase de escape. Com a abertura da válvula de escape e o pistão se deslocando do PMI para o PMS, os gases resultantes da queima são expelidos do cilindro. Neste processo a pressão decresce a valores próximos da atmosférica.

A Figura 7, a seguir, apresenta a evolução da pressão dentro da câmara de combustão em função da posição da árvore de manivelas. Conforme mencionado, durante as fases de admissão e exaustão ocorre uma pequena variação na pressão da câmara. Tal fenômeno é proveniente da diferença do diâmetro do pistão e das válvulas de admissão e escape do motor, gerando uma restrição ao fluxo. Verifica-se uma ligeira depressão na fase de admissão, bem como um ligeiro aumento da pressão quando os gases estão sendo expulsos da câmara, na fase de exaustão. Tal variação está ligada ao rendimento volumétrico do motor.

Verifica-se também no gráfico que a centelha elétrica (*spark*) proveniente da vela de ignição ocorre antes do PMS ou *top dead center* (TDC), com valores típicos entre 10° e 40° do ângulo da árvore de manivelas. A partir deste ponto, tem início a combustão, que, ao contrário do evidenciado no ciclo padrão-ar, não ocorre a volume constante. Neste caso, o que ocorre é o aumento do volume da câmara de

combustão, à medida que a pressão aumenta, devido ao deslocamento do pistão. A figura ilustra também, através da linha tracejada, a evolução da pressão na fase de compressão e expansão, sem a presença da combustão dos gases.

O segundo gráfico da Figura 7 apresenta a variação do volume da câmara de combustão em função da posição da árvore de manivelas. O eixo das ordenadas corresponde à relação entre o volume da câmara correspondente ao ângulo da árvore de manivelas e o volume morto inferior (volume máximo da câmara). Quando o pistão atinge o PMI ou *bottom-center* (BC), o volume da câmara corresponde ao seu máximo valor.



**Figura 7. Sequência de eventos nos quatro ciclos do motor – Pressão dentro da câmara de combustão e volume do cilindro em função da posição da árvore de manivelas.**

Fonte: HEYWOOD, J.: 1988, p.18

## 4.2 Análise das Potências do Motor

Esta seção define dois termos importantes que serão utilizados posteriormente: potência efetiva e potência indicada. A distinção se faz necessária para compreender a definição dos rendimentos do motor.

### 4.2.1 Potência Efetiva ( $N_e$ )

Como o próprio nome diz, esta definição de potência é aquela efetivamente disponibilizada no eixo do motor para realizar trabalho. Por esta razão, seu valor é de fácil obtenção com o uso de um freio dinamométrico.

Conhecendo, então, o torque aplicado ao eixo do motor, bem como sua rotação, obtém-se o valor de potência a partir de:

$$N_e = T\omega \quad (1)$$

ou ainda:

$$N_e = 2\pi nT \quad (2)$$

onde:

$T$  = Torque do motor [Nm];

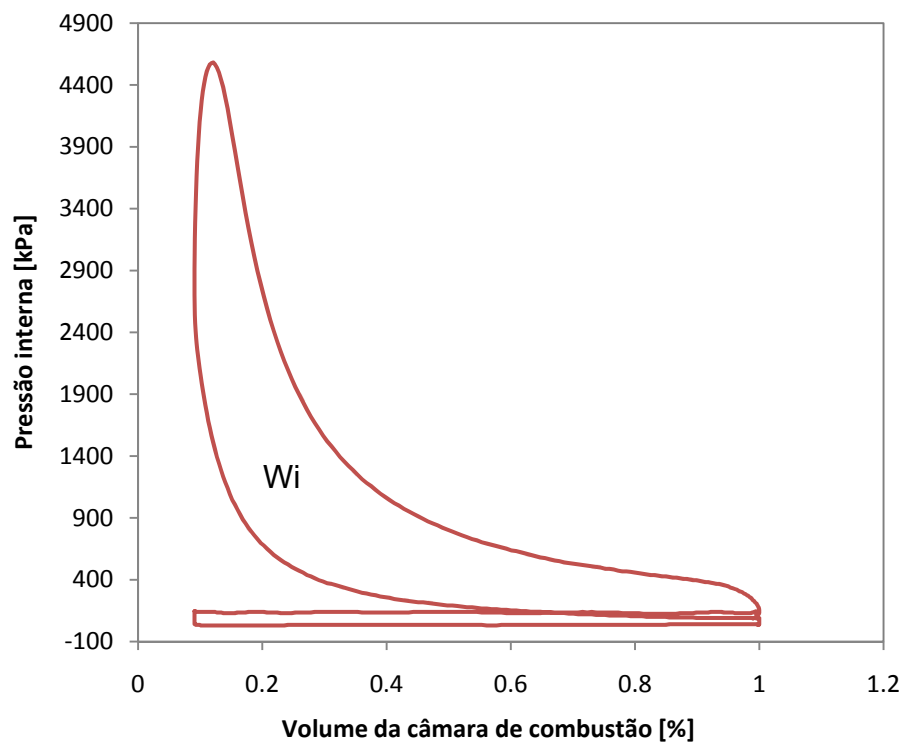
$\omega$  = Velocidade angular do motor [rad/s];

$n$  = Rotação do motor [rpm].

### 4.2.2 Potência Indicada ( $N_i$ )

A potência indicada pode ser definida como a potência desenvolvida na cabeça dos pistões pelo ciclo termodinâmico do fluido ativo. Ou seja, os valores de pressão dos gases dentro da câmara de combustão podem então ser utilizados para calcular o trabalho transferido para os pistões.

Assim sendo, a pressão na câmara e seu volume no instante correspondente, ao longo de todo o ciclo, podem ser plotados em um gráfico p-V conforme indicado na Figura 8.



**Figura 8. Diagrama p-V de um motor de combustão interna.**

Fonte: Elaborado pelo autor.

O trabalho indicado por ciclo do motor pode, então, ser obtido através da integração da área da curva conforme a equação abaixo:

$$W_i = \oint p_{cil} dV \quad (3)$$

onde:

$W_i$  = Trabalho indicado [Nm];

$p_{cil}$  = Pressão interna na câmara [N/m<sup>2</sup>];

$V$  = Volume da câmara [m<sup>3</sup>].

Finalmente, a partir do valor do trabalho indicado por ciclo do motor é possível obter o valor da potência indicada pela seguinte expressão:

$$N_i = W_i \frac{n}{2} \quad (4)$$

### 4.3 Rendimentos do motor

#### 4.3.1 *Rendimento Global*

Diversos estudos vêm sendo realizados no sentido de aumentar a eficiência dos motores de combustão interna, visto que grande parte da energia proveniente do combustível utilizado em seu funcionamento é perdida sob diferentes formas, sendo algumas delas inevitáveis. Uma forma de analisar a eficiência dos motores é através do seu rendimento.

Denomina-se rendimento de um motor à relação existente entre a energia mecânica que ele produz e a energia de qualquer espécie que lhe é fornecida. Ou seja, o rendimento global de um motor de combustão interna é dado pela razão entre a potência efetiva no eixo do motor ( $N_e$ ) e o fluxo de calor fornecido ( $Q$ ), proporcional à energia calorífica do combustível consumido por unidade de tempo.

$$\eta_g = \frac{N_e}{Q} \quad (5)$$

É possível também definir o rendimento de um motor como o produto entre o rendimento térmico e o rendimento mecânico.

Portanto:

$$\eta_g = \eta_t \eta_m \quad (6)$$

#### 4.3.2 *Rendimento Indicado*

Apesar de não ser o foco de análise deste trabalho, o rendimento indicado do motor é tão importante quanto o rendimento mecânico, exercendo grande influência no rendimento global. Assim sendo, cabe aqui apresentar ao menos uma simples definição. Denomina-se, portanto, rendimento indicado do motor à razão entre o trabalho útil no ciclo e a quantidade de calor fornecida ao sistema. Assim da segunda lei da termodinâmica:

$$\eta_i = \frac{Wi}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad (7)$$

onde:

$W_i$  = trabalho realizado;

$Q_1$  = Quantidade de calor fornecida;

$Q_2$  = Quantidade de calor cedido ao fim do ciclo.

De posse das suposições adotadas no ciclo de ar padrão Otto, tem-se:

$$\eta_t = 1 - \frac{T_1}{T_2} \left[ \frac{(T_4/T_1) - 1}{(T_3/T_2) - 1} \right] \quad (8)$$

onde:

$T_1$  = Temperatura no início da compressão;

$T_2$  = Temperatura no fim da compressão;

$T_3$  = Temperatura após troca de calor com a fonte quente;

$T_4$  = Temperatura no fim da expansão.

O rendimento térmico indica, portanto, a eficiência da queima do combustível. A diferença entre os valores de  $W$  e  $Q_1$  se dá por perdas nos gases de escape, por troca térmica com o fluido de arrefecimento e por combustão incompleta. Ou seja, quanto melhor e mais completa for a combustão, maior será o rendimento térmico.

#### 4.3.3 *Rendimento Mecânico*

Grande parte da energia disponível no ciclo do motor é utilizada para vencer a força de atrito existente nos mancais, comando de válvulas, pistões, anéis, bomba de óleo e água e em todos os outros componentes mecânicos do motor e seus sistemas periféricos. Além disso, existe uma parcela adicional de energia que é utilizada na exaustão dos gases de escapamento, bem como na admissão de gases frescos. Todas essas parcelas são somadas dando origem à potência de atrito.

Desta forma, o rendimento mecânico dos motores de combustão interna é obtido pela relação dos valores de potência útil ( $N_e$ ) e potência indicada ( $N_i$ ) segundo a equação:



$$\eta_m = \frac{N_e}{N_i} \quad (9)$$

A potência de atrito é de difícil determinação. Uma técnica de medição comumente utilizada é a de acionar o motor através de um dinamômetro elétrico, sem que ocorram combustões nos cilindros, e medir a potência aplicada ao dinamômetro para mantê-lo em rotação constante. Rotação do motor, posição da borboleta e temperaturas de água e óleo devem ser as mesmas do motor em funcionamento normal.

No entanto, como será visto mais adiante, a grande incerteza relacionada a este método de medição se deve a ser a pressão dos gases aplicada nos pistões e seus anéis, bem menor do que aquela decorrente da combustão. Assim, os valores das perdas por atrito encontrados tendem a ser menores do que realmente o são.

Como mencionado, esta relação indica as perdas mecânicas existentes no motor: dentre elas, as perdas por atrito entre o pistão e o cilindro do motor. As análises realizadas neste trabalho têm, mesmo que de forma implícita, o principal objetivo de estudar o rendimento mecânico do motor, visando à redução do atrito proveniente da saída do pistão, de modo a aumentar o valor da potência efetiva em uma mesma condição de funcionamento do motor.

#### **4.4 Sistema biela manivela e bloco do motor**

O sistema biela manivela é composto pelos pistões, bielas e árvore de manivelas sendo ainda muito influenciado pelas características do bloco do motor. Tendo em vista que a análise deste trabalho será focada neste sistema, principalmente no pistão, pretende-se aqui fazer uma breve apresentação de seus componentes, funções e características funcionais e construtivas, bem como seu efeito no atrito do motor.

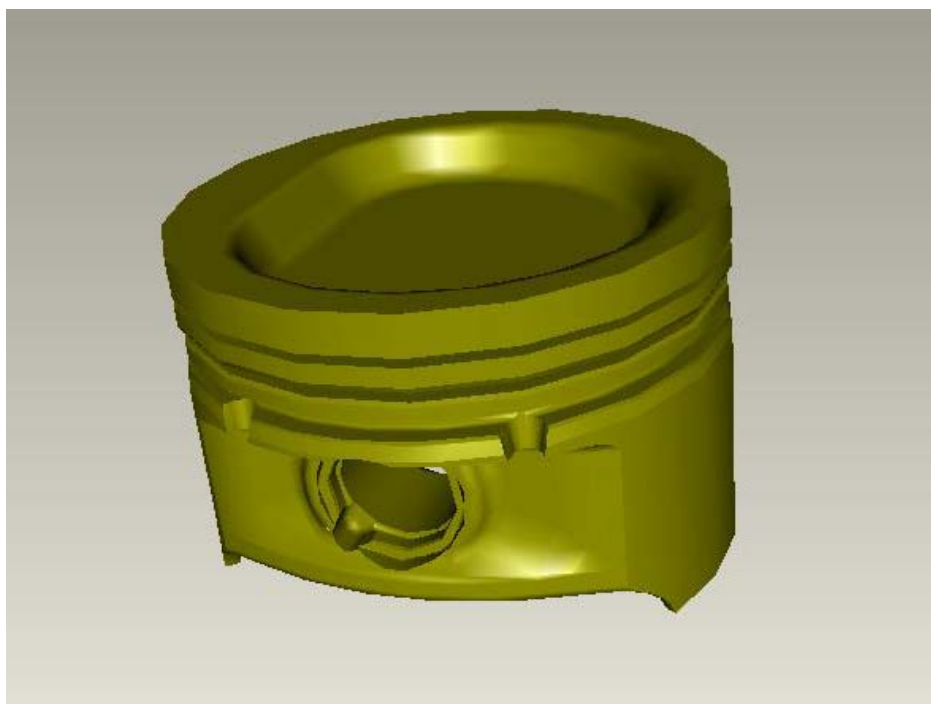
##### **4.4.1 Pistão**

O pistão ou êmbolo de um motor é uma peça cilíndrica normalmente feita de alumínio ou liga de alumínio, que se move longitudinalmente no interior do cilindro

dos motores de explosão. Tem como principais funções comprimir a mistura ar-combustível no cilindro (fase de compressão) e converter a energia térmica gerada pela explosão em energia mecânica durante a fase de expansão.

Além disso, os pistões são também responsáveis por terminar o processo de homogeneização da mistura ar/combustível. A forma de seu topo determina não só o modo como a mistura combustível ar preenche o cilindro, mas também altera a turbulência durante a compressão.

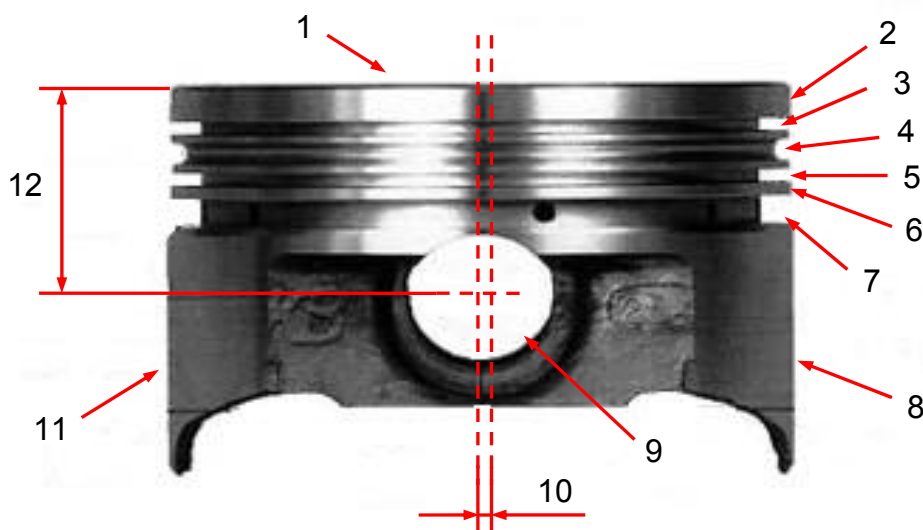
Sua forma tem influência tanto no rendimento mecânico, como no rendimento térmico do motor. O presente trabalho restringe-se ao estudo centrado na avaliação do rendimento mecânico e da forma de interação do pistão com o cilindro do motor.



**Figura 9. Pistão do motor EA111 1,4l**  
Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 9 ilustra o pistão atualmente utilizado no motor analisado. Como se pode perceber, o pistão é uma peça de geometria complexa. Diversas de suas características construtivas influenciam diretamente no seu bom funcionamento.

Por este motivo, é interessante apresentar inicialmente a nomenclatura normalmente utilizada para as respectivas partes e dimensões do pistão. A Figura 10 a seguir apresenta um resumo destas principais características.



- |                       |  |
|-----------------------|--|
| 1. Topo do pistão     | 7. Terceira canaleta                     |
| 2. <i>Top land</i>    | 8. Saia do pistão (lado pressão)         |
| 3. Primeira canaleta  | 9. Furo do pino do pistão                |
| 4. <i>Second land</i> | 10. <i>Off-set</i> do pino do pistão     |
| 5. Segunda canaleta   | 11. Saia do pistão (lado contra-pressão) |
| 6. <i>Third land</i>  | 12. Altura do pistão                     |

**Figura 10. Principais nomenclaturas do pistão**

Fonte: Elaborado pelo autor

O topo do pistão como o próprio nome indica, é a superfície superior do pistão e onde ocorre a ação da pressão dos gases provenientes da combustão. Já os *lands* e as canaletas são importantes para a montagem dos anéis. Os *lands* são as superfícies de apoio e separação do pacote de anéis e as canaletas a parte aprofundada onde estes são montados.

Em seguida tem-se o furo de alojamento do pino do pistão. O pino do pistão tem como função unir o pistão à biela do motor. Para permitir a rotação do pistão em torno do seu eixo, o pino é do tipo flutuante, ou seja, não é ajustado nem ao pistão nem à biela. Sua movimentação axial é limitada normalmente pela montagem de anéis nas extremidades de seu alojamento no pistão.

O *off-set* do pino é definido pela distância máxima entre o centro do pistão e o centro do pino. Esta é uma das importantes características do pistão em relação à sua dinâmica e suas perdas por atrito. Sabe-se que os pistões são uma das fontes de ruído do motor, devido à forma com que se movimentam dentro do cilindro. Assim

sendo, principalmente em aplicações para automóveis de passageiros, faz-se necessário, em alguns casos, maiores *off-sets* de pino com o intuito de reduzir a batida do pistão no cilindro, tornando o motor mais silencioso. No entanto, tal medida tende a aumentar a força de atrito sobre o pistão, que será mais pressionado contra a parede do cilindro. Encontrar uma boa relação entre qualidade acústica e rendimento mecânico é um dos requisitos para um bom projeto de pistão.

Já a altura do pistão é definida pela distância entre o centro do furo do pino do pistão até o seu topo. De acordo com Taylor (1976), boas relações entre a altura do pistão e seu diâmetro variam entre 0,25 e 0,97. Esta dimensão está relacionada com o projeto dos anéis e da biela, pois deve comportar os três canaletes e *lands*, sem comprometer a estrutura do pistão, bem como o olhal da biela, na parte interna do pistão. Com a tendência de projetos de reduzir a massa destes componentes, a altura do pistão também tende a diminuir.

Finalmente têm-se as saias do pistão. Sem dúvida, dentre todas as outras características do pistão, é a saia que exerce maior influência nas perdas por atrito. As saias do pistão têm como função guiar o seu movimento dentro do cilindro. Nelas atua o carregamento lateral proveniente do mecanismo. A saia do lado de pressão é a que recebe maior carregamento, uma vez que atua na fase de combustão do motor. Já a saia do lado de contrapressão recebe carregamento quando o pistão está no movimento de subida.

Desta forma, a saia do êmbolo se comporta como um mancal de deslizamento pivotado. Taylor (1971) afirma que “o êmbolo gira de tal forma que, do lado carregado, a película de óleo na aresta de ataque é sempre mais espessa [...]”. Ainda de acordo com Taylor (1971), dependendo do carregamento, a película de óleo não é suficiente para preencher toda a superfície de contato. Assim, torna-se evidente que as perdas por atrito, bem como a espessura do filme, variam em função da carga e da rotação do motor.

Outra função da saia é estabelecer a folga de montagem entre o pistão e o cilindro, uma vez que é a saia que possui o maior diâmetro externo do pistão. Mais uma vez, aqui se deve levar em consideração o melhor compromisso entre qualidade acústica do motor e a minimização das perdas por atrito, haja vista que a máxima folga possível também pode ser benéfica para a redução das perdas.

No entanto, a folga existente entre a saia do pistão e o cilindro do motor não é constante. Com o intuito de reduzir os impactos do pistão, permitindo que este se movimente sempre em contato com o cilindro, à medida que se movimenta ao longo dele, as saias dos pistões são normalmente perfiladas. A especificação de folga se dá pelo menor valor encontrado ao longo da saia.

Além de evitar a batida do pistão com o cilindro, o perfil da saia deve ser especificado de modo a definir a área onde o pistão se apoiará no cilindro. Esta, por sua vez, deve ficar limitada dentro da área da saia de modo a evitar o engripamento do pistão. A Figura 11 abaixo apresenta um pistão após o uso, onde a área em que ocorreu o contato pode ser claramente identificada por ser uma região espelhada.



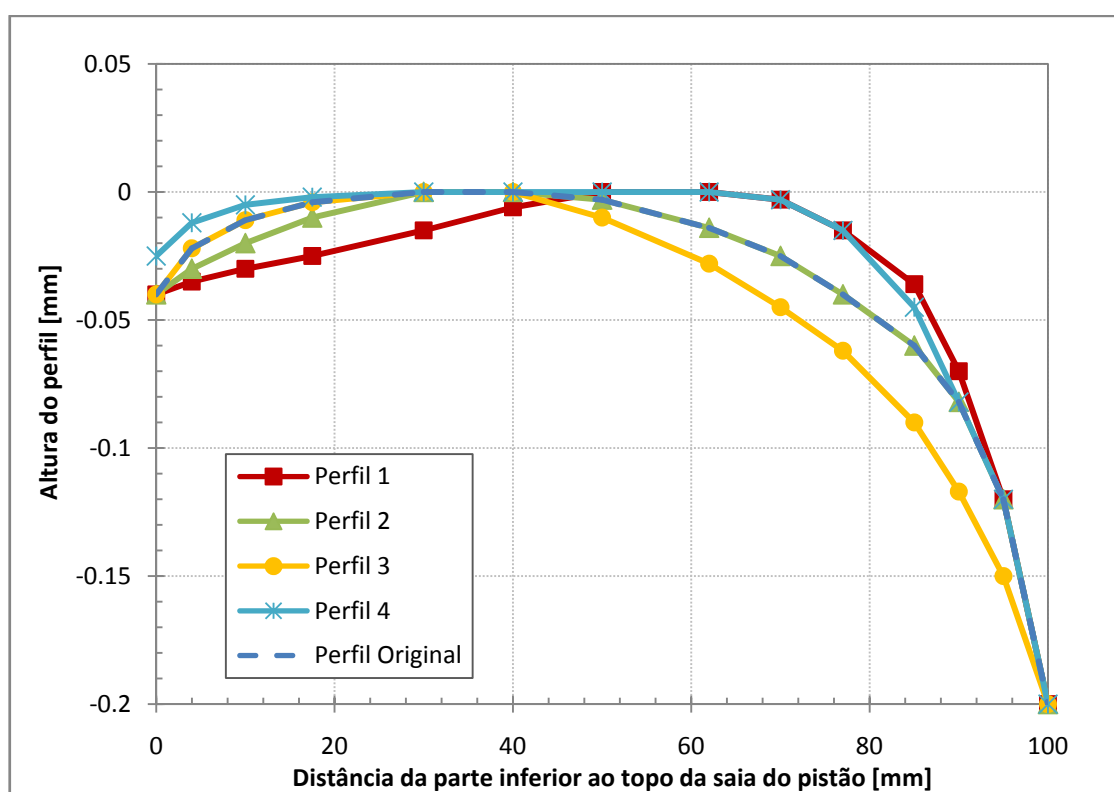
**Figura 11. Detalhe da saia de um pistão após a utilização – Em destaque região onde ocorreu desgaste**  
Fonte: Elaborado pelo autor

Um bom projeto de pistão deve levar em consideração todos esses aspectos, de modo a se obter um bom compromisso entre robustez e durabilidade da peça, perdas por atrito e ruído gerado pelo pistão. De acordo com Taylor (1976), a redução de atrito deve levar em conta uma combinação de fatores, como pequena relação altura-diâmetro, mínima área de saia e máxima folga.

Como será apresentado em detalhes, a seguir, a lubrificação existente entre pistão e cilindro é do tipo elastohidrodinâmico. Por esta razão, reduzir a área de mancal da saia do pistão, conforme indicado por Taylor (1976), implica na redução direta do atrito hidrodinâmico. Em contrapartida, este recurso resulta também no aumento da parcela de atrito seco. O balanço final é normalmente favorável. No

entanto, deve-se tomar cuidado para que o aumento da parcela de atrito seco não ultrapasse a redução obtida da parcela hidrodinâmica.

Um estudo sobre alguns parâmetros de projeto do pistão foi realizado por Mansouri et al. (2005) no Massachusetts Institute of Technology. De acordo com este estudo o perfil de saia é um dos parâmetros-chave no projeto de pistões, uma vez que permite alterar o filme hidrodinâmico de óleo entre o pistão e o cilindro. Em seu estudo, parte-se de um perfil de referência, já utilizado para produzir quatro outros perfis propostos. A Figura 12 apresenta o comparativo entre tais perfis de saia.



**Figura 12. Comparativo das alturas dos perfis estudados**

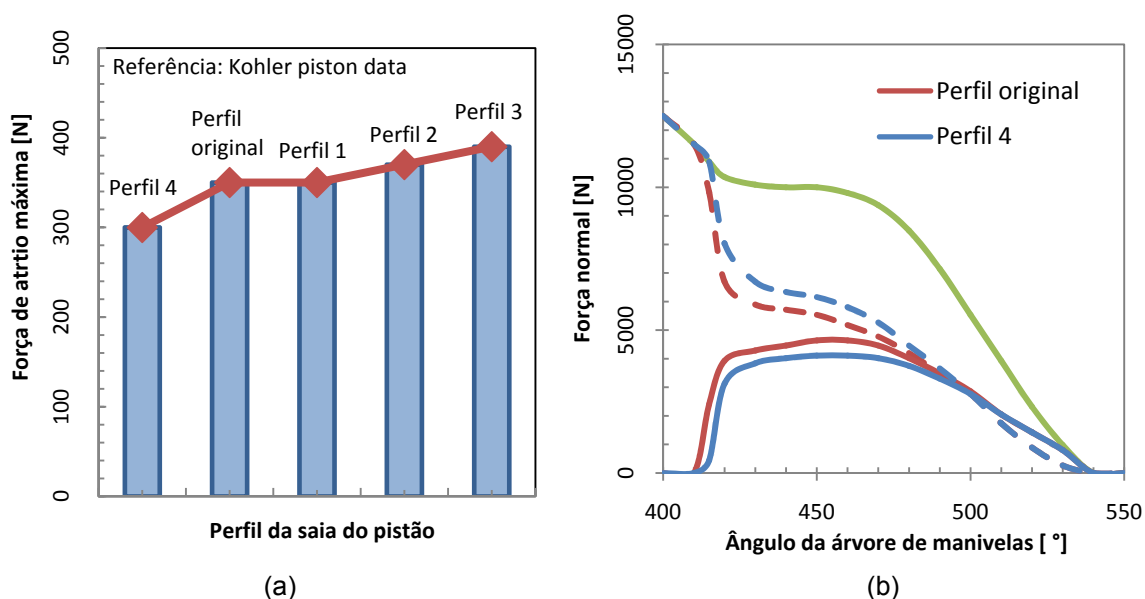
Fonte: MANSOURI, S. et al.: 2005, p.442 v.219

De um modo geral os perfis estudados por Mansouri et al. (2005) tendem a reduzir a área de contato, aumentando a folga existente. O perfil 3 por exemplo, é bem menos conservador que o original, aumentando a folga consideravelmente, cerca de 0,04 mm, na parte inferior do pistão. Já o perfil 4 é construído de forma mais plana e suave ao longo da saia.

Ao analisar os resultados, nota-se que o único perfil que obteve sucesso na redução das perdas por atrito foi o quarto perfil. Todos os outros tendem a manter ou

aumentar o valor original da perda. A Figura 13a apresenta tais valores. Obteve-se assim uma redução de 5% nas perdas de atrito na saia do pistão. Tal redução torna-se mais expressiva devido ao fato de alterações no perfil de saia serem de simples e rápida implementação.

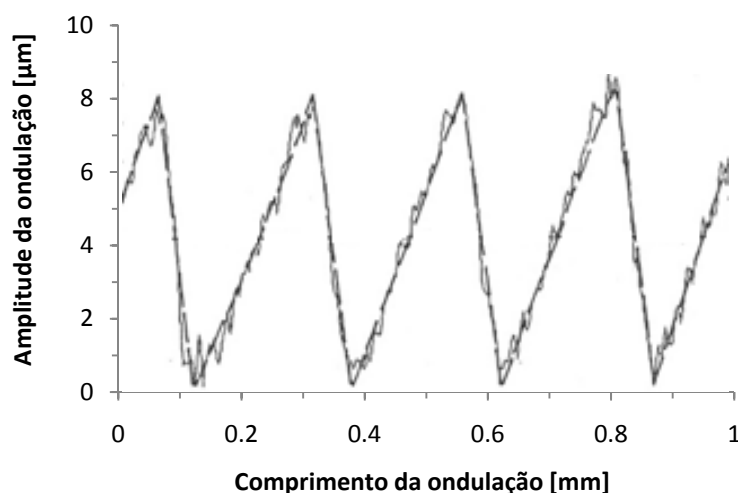
O aumento no valor encontrado nos outros perfis pode ser explicado pela Figura 13b. Nela é feita uma comparação entre as forças normais hidrodinâmicas e de contato, obtidas para cada tipo de perfil. Note que, no caso do perfil 4, apesar da força hidrodinâmica ter aumentado, o valor da respectiva força de contato reduziu significativamente. Já, quando são analisados os outros perfis, verifica-se que a redução da força hidrodinâmica é menor do que o aumento na força de contato. Assim, o pistão analisado por Mansouri et al. (2005) representa um caso onde a área de contato já estava otimizada. Consequentemente, perfis “agressivos” e com maiores folgas prejudicam a formação do filme hidrodinâmico.



**Figura 13. Comparativo dos resultado obtidos - (a) Força de atrito máxima em função do perfil de saia; (b) Parcelas das forças hidrodinâmicas e forças de contato de cada perfil**  
 Fonte: MANSOURI, S. et al.: 2005, p.443 v.219

Finalmente, deve-se considerar o efeito do acabamento superficial das saias de pistão. A superfície da saia do pistão é ligeiramente áspera, com muitas pistas circulares idênticas, provenientes do processo de usinagem. Tais pistas, apesar de elevarem a rugosidade superficial da saia do pistão, tornam-se necessárias para reter um filme de óleo ao longo de sua superfície, reduzindo as perdas por atrito e evitando o seu engripamento no cilindro.

A Figura 14 apresenta o perfil da superfície de um pistão novo. Dado que a amplitude de tais ondulações reduz ao longo da vida útil de um pistão, deve-se levar em consideração o efeito do desgaste ao especificar a rugosidade superficial da saia do pistão. Caso contrário, o pistão poderá vir a engripar no cilindro por não ser capaz de reter óleo em sua superfície.

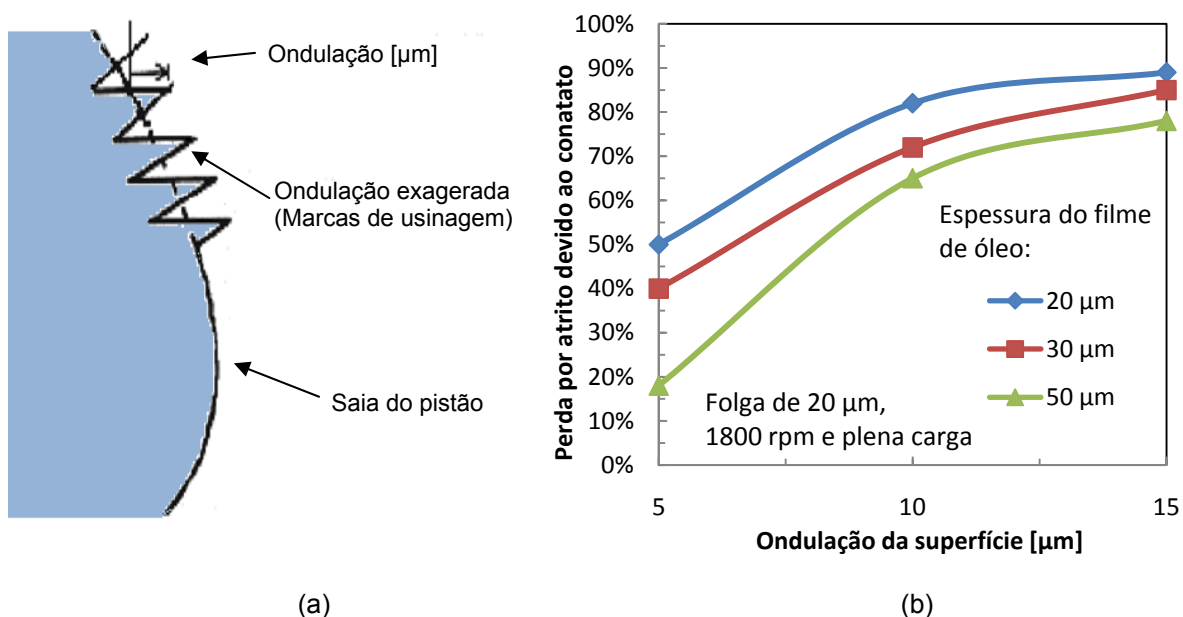


**Figura 14. Perfil da superfície de uma saia de pistão novo**

Fonte: ZHU, D. et al.: 1991, p.556 v.114.

Mesmo assim, a influência das ondulações nas perdas por atrito não deve ser esquecida. No mesmo trabalho de Mansouri et al. (2005), é realizado um estudo dos efeitos da ondulação da superfície da saia no atrito gerado pelo contato entre pistão e cilindro. A Figura 15a apresenta, de forma exagerada, a ondulação considerada. A amplitude da ondulação corresponde à distância do pico até a linha correspondente ao perfil da saia.





**Figura 15. (a) Detalhe das marcas de usinagem consideradas; (b) Perdas por atrito em função da rugosidade do pistão**

Fonte: MANSOURI, S. et al.: 2005, p.441 v.219

O estudo é realizado de modo a comparar, para três espessuras de filme de óleo, o comportamento das perdas por atrito em função do tamanho das ondulações provenientes da usinagem da saia. Ao analisar o resultado na Figura 15b, nota-se que as perdas são muito sensíveis para ondulações baixas e tendem a se estabilizar à medida que este valor aumenta. Filmes de óleo mais espessos também são benéficos para reduzir as perdas.

#### 4.4.2 Biela e árvore de manivelas

Em um motor alternativo a biela é responsável por transmitir o movimento do pistão para a árvore de manivelas. Para carros de passeio, são normalmente construídas em aço forjado, mas podem ser de alumínio ou até mesmo titânio de modo a reduzir sua massa.

Durante o funcionamento do motor, a biela fica sujeita a forças de compressão muito elevadas, provenientes da fase de expansão do cilindro e a forças de tração, nas fases de admissão do motor. Sendo assim, as bielas são mais solicitadas nas condições de plena carga e de elevadas rotações do motor.

Já a árvore de manivelas, também chamada de virabrequim, é responsável por converter o movimento alternado do pistão em movimento de rotação. Desta

forma a árvore de manivelas possui mancais excêntricos ao seu eixo principal, onde as bielas são montadas.

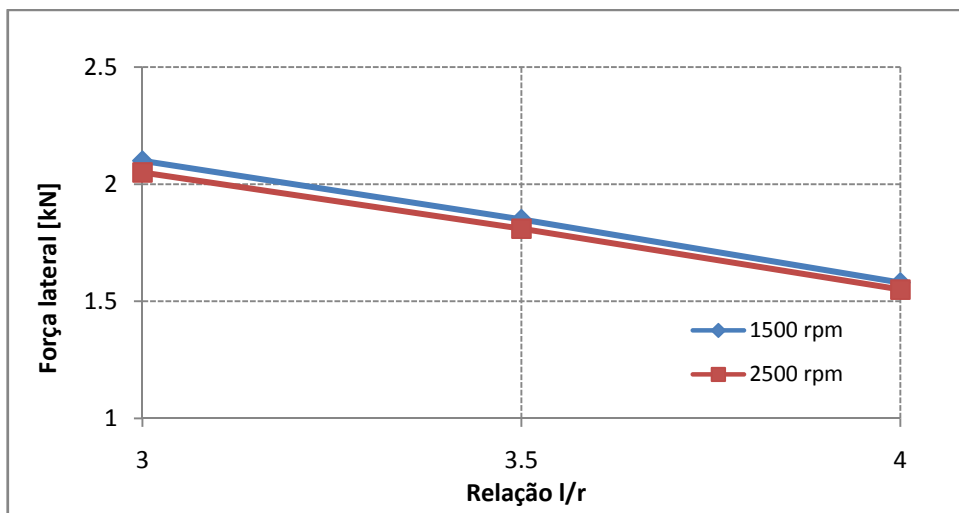
As árvores de manivelas são geralmente construídas em ferro fundido. No entanto, algumas aplicações que necessitam de maior resistência, bem como maior rigidez estrutural, utilizam árvores de aço forjado.

A união da biela com a árvore de manivelas forma, por sua vez, o sistema biela-manivela do motor. Este tipo de sistema, criado em 1206 por Al-Jazari's, é utilizado em praticamente todos os motores alternativos produzidos atualmente. Embora o sistema biela-manivela seja fonte de diversas perdas por atrito do motor, principalmente devido aos seus diversos mancais, o interesse aqui está na relação existente entre o comprimento da biela e o raio da árvore de manivela.

Como comentado anteriormente, uma das características deste sistema é criar uma componente da força normal ao movimento do pistão, a qual proporciona grande parcela das perdas existentes entre pistão e cilindro. No entanto a força lateral criada está diretamente relacionada ao comprimento da biela bem como ao raio da árvore de manivelas.

Define-se, então, a relação " $l/r$ ", onde  $l$  corresponde ao comprimento entre os centros dos olhais da biela e  $r$  à distância entre o eixo principal da árvore de manivelas e o eixo de seus mancais de bielas, também chamado raio da árvore de manivelas. Valores comuns e considerados como bons, em projetos de motores situam-se entre 3,0 e 3,5.

Wakabayashi et al. (2003) do Instituto de Tecnologia de Masashi realizou estudo sobre o efeito da relação " $l/r$ " nas perdas de atrito do pistão. De acordo com a Figura 16, o aumento da relação, de 3,0 para 4,0 reduz a força lateral na saia do pistão em até 25%, quando ocorre a combustão.

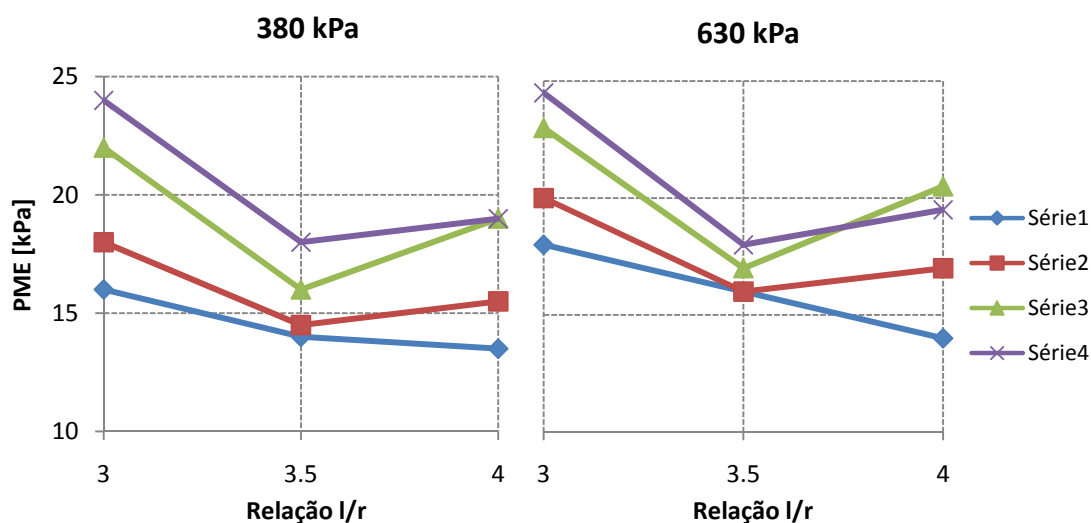


**Figura 16. Valor máximo da força lateral no pistão em função da relação “ $l/r$ ”**  
 Fonte: WAKABAYASHI, R. et al.: 2003, p.23.

A partir destes resultados, Wakabayashi et al. (2003) utilizaram um método experimental para avaliar o efeito desta redução de força no atrito entre o pistão e o cilindro. No entanto, alterações da relação “ $l/r$ ” são geralmente complicadas de serem realizadas, pois outros fatores também são afetados. Alterações na altura do pistão, no pacote de anéis ou até mesmo na altura do bloco do motor, podem ser necessárias. Por este motivo, avaliações experimentais do efeito da relação “ $l/r$ ”, de modo isolado, são prejudicadas.

Sendo assim, Wakabayashi et al. (2003) alteraram o curso do pistão como artifício, para permitir a variação de “ $l/r$ ”. Mesmo que, conforme indicado em seu texto, a pressão interna na câmara, bem como a relação estequiométrica, tenham sido mantidas iguais, fatores como velocidade e eficiência da queima do combustível podem variar, uma vez que se altera a taxa de variação de volume da câmara, podendo assim, ter-se mascarado o resultado obtido.

A Figura 17 apresenta os resultados obtidos no estudo. Nela são comparadas as pressões médias efetivas relativas ao atrito do pistão, em função da relação “ $l/r$ ”. Foram realizados ensaios em quatro rotações do motor e em duas condições de carga. Pode-se facilmente verificar uma grande redução das pressões de atrito quando se trabalhou com uma relação “ $l/r$ ” de 3,5.



**Figura 17. Pressão média efetiva relativa ao atrito do pistão em função de “l/r”, rotação e carga do motor**

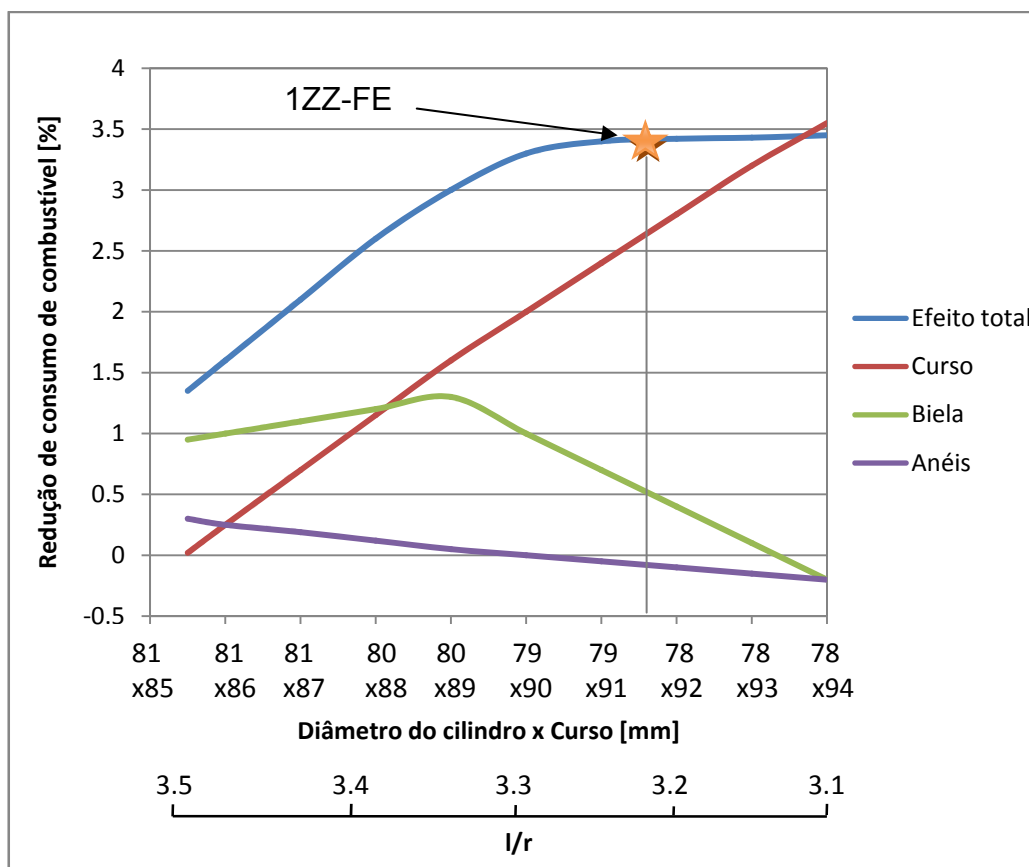
Fonte: WAKABAYASHI, R. et al.: 2003, p.24.

Em contrapartida, ao elevar a relação “l/r” para 4,0, não foram verificadas grandes variações nos valores encontrados. Em alguns casos, como a 2500 rpm e 630 kPa de carga, ocorreu aumento significativo do atrito.

Um segundo estudo, desenvolvido por um grupo de engenheiros da Toyota Motor Corporation e publicado pela SAE<sup>2</sup> em 1998, apresenta o desenvolvimento de um de seus motores onde o parâmetro “l/r” é tratado, bem como implementado no projeto. O objetivo do trabalho de Adachi et al. (1998) é o de reduzir o consumo e o nível de emissões, bem como melhorar os níveis acústico e vibratório do motor. Foram estudadas diversas alterações no motor de modo a atingir o objetivo.

Um dos pontos abordados no estudo diz respeito à relação “l/r”, assim como o curso e o diâmetro do pistão. A Figura 18 apresenta as estimativas de redução de consumo realizadas, em relação ao motor em seu estado inicial.

<sup>2</sup> Society of Automotive Engineers (Sociedade de Engenheiros Automotivos)



**Figura 18. Influência da relação “l/r” e do curso do pistão no consumo de combustível**

Fonte: Adachi, S. et al.: 1998, p.4.

A curva vermelha indica a influência da relação entre curso e diâmetro do pistão. De acordo com Adachi et al. (1998), tais valores foram obtidos através da análise das características construtivas e de consumo de combustível de outros dez motores da Toyota. Já a curva verde apresenta a estimativa do consumo específico em função da variação da relação “l/r”. Esta, por sua vez, foi obtida experimentalmente, variando-se a relação “l/r” em 3,0, 3,3 e 3,6. Adachi et al. (1998) afirmam que, para o motor avaliado, relações maiores que 3,6 não reduzem o consumo, pois o aumento de massa da biela, proporcionado pelo seu maior comprimento, resulta em impacto negativo para o atrito.

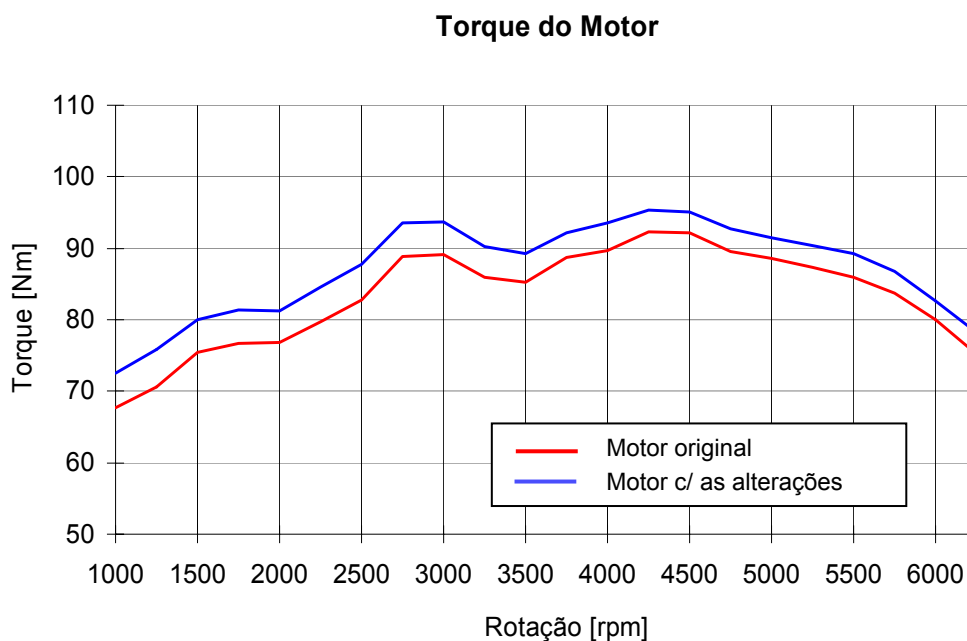
Nesse estudo determinou-se uma altura máxima para o bloco do motor e, finalmente, o ponto indicado corresponde às especificações utilizadas. Obteve-se, então, redução de 3% no consumo de combustível do motor, através de alterações no conjunto pistão, biela e manivela. Tal resultado pode, dependendo da referência inicial, ser considerado realmente otimista.

De acordo com ambas as pesquisas, seja a de Adachi et al. (1998) como a de Wakabayashi et al. (2003), a relação " $l/r$ " possui um ponto de inflexão em relação a influência no atrito. A partir deste ponto, aumentar a relação não reduzirá as perdas por atrito, podendo até aumentá-las. Em ambos os estudos, a relação " $l/r$ ", onde este fenômeno ocorre, está em torno de 3,3 e 3,5.

No entanto, este valor não deve ser considerado como uma regra, pois trata-se de uma característica do conjunto em si. Como comentado, a inversão na tendência de redução das perdas de atrito deve-se ao aumento das forças inerciais do conjunto devido ao aumento da massa da biela. Assim, conjuntos, onde a massa do pistão é pequena, devido a pequenos diâmetros de cilindro, bem como onde a biela é esbelta, podem suportar maiores relações " $l/r$ ".

Foi elaborado na Volkswagen do Brasil, um estudo de um conjunto de alterações para redução de atrito de um de seus motores de baixa capacidade volumétrica. Uma das alterações foi o aumento da relação " $l/r$ " do motor de 4,0 para 4,3, ao se alongar a biela. Tendo em conta o tamanho e massa de seus componentes, foi possível reduzir as forças laterais do pistão mesmo com uma relação alta.

Tais alterações permitiram o aumento do torque do motor em até 4,0 Nm (4 a 6%), bem como a redução do consumo de combustível do motor. A Figura 19 apresenta os resultados obtidos. Infelizmente, devido à complexidade para alterar a relação " $l/r$ " sem alterar o conjunto pistão, não foi possível avaliar individualmente o efeito do alongamento da biela.



**Figura 19. Comparativo entre: motor antes das alterações e após as alterações de atrito - Torque do motor X Rotação do motor**

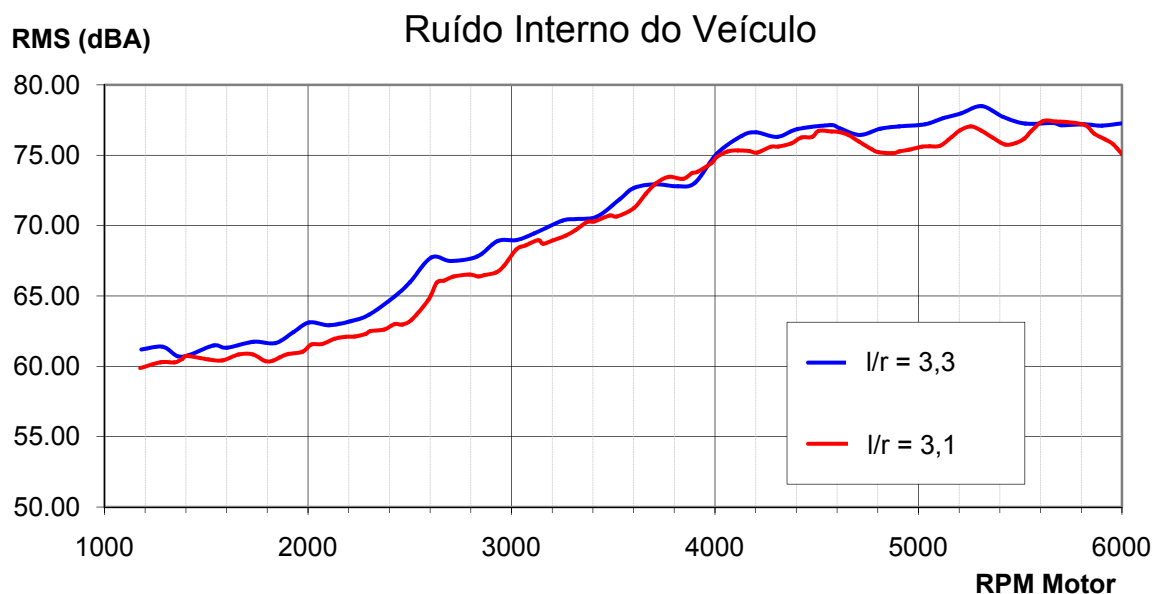
Fonte: Elaborado pelo autor

Outra grande influência da relação “l/r” está no comportamento acústico e vibracional do conjunto motor. Isto ocorre, pois ao reduzir a componente da força normal ao movimento do pistão, o bloco do motor, e, conseqüentemente todo o conjunto motor, é excitado de forma menos intensa. Sendo assim, é comum verificar-se reduções dos níveis de NVH<sup>3</sup> do veículo ao se alterar a relação “l/r”.

Também na Volkswagen do Brasil, foi realizada uma pesquisa sobre o potencial de redução dos níveis de ruído interno do veículo através do alongamento da biela de um de seus motores. Assim, um veículo foi avaliado com duas relações “l/r”: de 3,1 e de 3,3.

---

<sup>3</sup> Noise, vibration and harshness – Vibrações e ruídos veiculares



**Figura 20. Medição de ruído interno do veículo em função da relação “ $l/r$ ” - RMS [dBA] x Rotação do motor [rpm]**

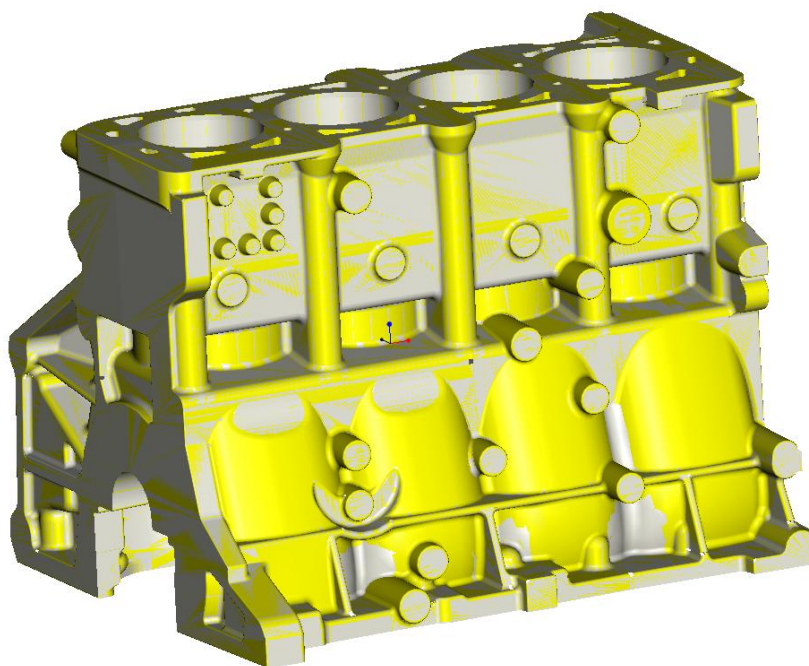
Fonte: Elaborado pelo autor.

Ao analisar os resultados obtidos na Figura 20, nota-se uma redução do nível interno de ruído do veículo em praticamente em todas as rotações. Em determinados pontos, esta redução é bastante significativa, atingindo 3,0 dBA. É interessante notar que na região de torque máximo do motor, entre 2000 e 3000 rpm, verifica-se maior redução, visto que nela são maiores os esforços provenientes da combustão.

#### 4.4.3 Bloco do motor

O bloco do motor é a peça onde ficam contidos os cilindros do motor e possui duas funções principais. A primeira delas é ser o principal componente estrutural do motor, permitindo a montagem dos outros componentes, bem como a sua própria montagem nos veículos. A segunda função é de servir como superfície de mancal de deslizamento dos pistões e anéis. Consequentemente, a forma construtiva dos cilindros do bloco do motor torna-se um dos pontos chaves na análise da força resistiva existente na saia dos pistões.





**Figura 21. Bloco do motor EA111 1,4l**  
Fonte: Elaborado pelo autor.

Tradicionalmente, os blocos do motor são construídos em uma peça única de ferro fundido cinzento, devido a sua boa resistência ao desgaste e baixo custo. Além dos cilindros, o bloco do motor possui passagens internas de água, para refrigeração do motor, chamadas de galerias.

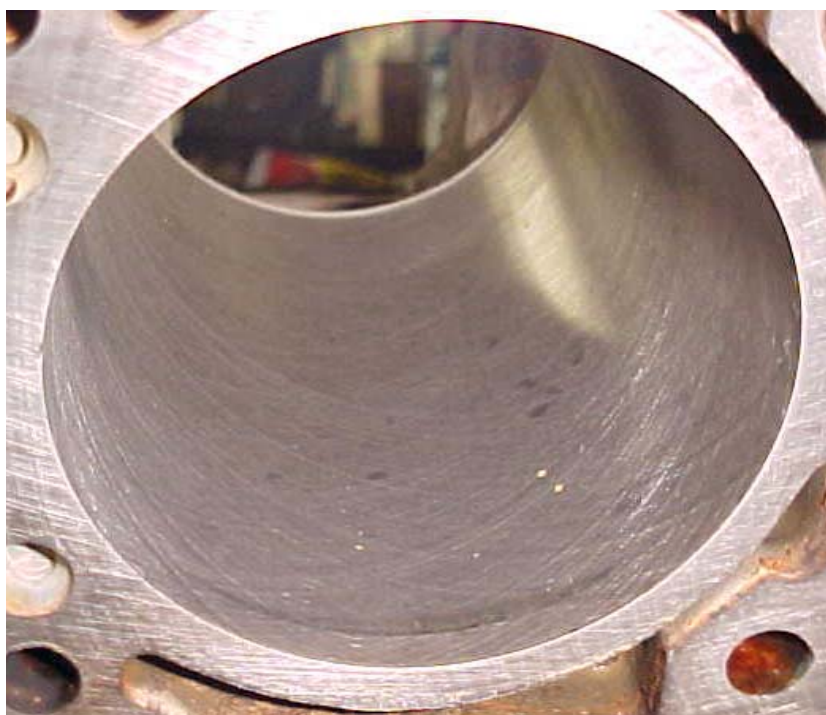
Blocos de motores maiores para serviço pesado possuem, geralmente, cilindros removíveis, chamados de camisas, que podem ser substituídas quando necessário. Tais tipos de camisas podem ser do tipo *wet liners* ou *dry liners*, dependendo se esta possui contato direto ou não com a água de refrigeração do motor.

Já motores menores, principalmente os mais modernos, possuem blocos construídos em alumínio, de modo a reduzir o peso total do motor. Nestes casos, camisas de ferro fundido são inseridas durante o processo de fundição.

Por constituírem a superfície de contato entre bloco e pistões, os cilindros do motor possuem grande importância técnica para o bom funcionamento e desempenho dos motores. Na fabricação de blocos para motores, o brunimento dos cilindros é uma das operações de usinagem de maior relevância. As características da superfície brunida dos cilindros têm forte influência na durabilidade do motor, no

tempo de amaciamento, no consumo de óleo lubrificante e, principalmente, nas perdas por atrito com o pistão.

A superfície dos cilindros deve, portanto, possuir um acabamento refinado de baixa rugosidade, de modo a reduzir a resistência ao movimento. Valores rms<sup>4</sup> típicos de rugosidade superficial são da ordem de 0,33 µm. No entanto, a superfície deve ser capaz de reter óleo lubrificante ao longo da pista de deslizamento, de modo que sempre haja um filme de óleo entre a saia do pistão e a superfície do cilindro. Esta característica é obtida através das ranhuras cruzadas provenientes do processo de brunimento. A Figura 22 apresenta em detalhe tais ranhuras em uma superfície recém usinada.



**Figura 22. Detalhe da superfície do cilindro do bloco do motor**  
Fonte: Desconhecida

A redução destas ranhuras, quando se pretende reduzir emissões, bem como sua eliminação, reduzem o filme de óleo entre o pistão e cilindro. Como consequência tem-se o aumento das perdas por atrito de contato, bem como o aumento da temperatura de trabalho do pistão. Em casos extremos, onde a lubrificação reduz-se significativamente, pode ocorrer o engripamento do pistão.

---

<sup>4</sup> A indicação refere-se à média quadrática das irregularidades superficiais.

#### 4.4.4 Cargas

Os carregamentos impostos ao conjunto pistão, biela e manivela podem ser divididos em dois grupos com características distintas conforme segue.

##### 4.4.4.1 Cargas de pressão de gás

As cargas provenientes da pressão dos gases nos cilindros são, na maioria dos casos, o maior carregamento a ser suportado pelo conjunto. Devido à rápida queima do combustível na câmara e a rápida elevação da pressão interna, o conjunto recebe uma brusca elevação de carga.

Esta carga é aplicada ao topo do pistão, pressionando o sistema e permitindo a geração de trabalho mecânico. Ocorre uma vez a cada ciclo na fase de combustão. Desta forma, o conjunto de um cilindro é solicitado a cada duas voltas do motor de quatro tempos. A pressão dentro da câmara pode ser determinada através da instalação de um transdutor de pressão específico para esta aplicação.

##### 4.4.4.2 Cargas de inércia

As cargas inerciais são características das massas dos componentes do sistema, sendo, normalmente, mais expressivas em rotações maiores. Em aplicações para veículos de passeio, não constituem um problema real para o conjunto, mas podem influenciar no resultado obtido.

#### 4.5 Metodologias de ensaios

Para estudar o fenômeno das perdas mecânicas nos motores de combustão interna com clareza e precisão, chegando a conclusões verdadeiras, deve-se definir uma metodologia confiável para a sua determinação. Dependendo do foco de análise, a determinação por métodos experimentais torna-se complexa, demandando muito recurso e tempo. Assim, uma das alternativas é a utilização de métodos preditivos, onde os resultados são obtidos através de modelos matemáticos, como é o caso deste trabalho.

Pretende-se, nesta seção, apresentar os principais métodos experimentais e trabalhos realizados, bem como alguns modelos matemáticos desenvolvidos sobre o tema.

#### *4.5.1 Métodos experimentais*

Diversos são os métodos experimentais para a determinação das perdas por atrito no motor. Para cada objetivo, recomenda-se um determinado procedimento. A seguir, os principais deles.

##### *4.5.1.1 Medição da pressão média efetiva de atrito*

Conforme comentado, a potência indicada, assim como a pressão média efetiva, pode ser obtida através da medição da pressão interna do cilindro, em função do volume da câmara nas fases de compressão e expansão do motor. Ao subtrair deste valor, a pressão média efetiva, fornecida pelo motor, é possível determinar a pressão de atrito média efetiva e, finalmente, a potência de atrito do motor.

Este é, sem dúvida, um dos mais precisos e mais confiáveis métodos experimentais. No entanto, tal método não é de simples realização uma vez que os motores possuem, usualmente, mais de um cilindro. Consequentemente, torna-se necessária a instrumentação de todos os cilindros, bem como um controle preciso da grande quantidade de dados coletados.

Adicionalmente, este método fornece somente o valor total das perdas do motor. Avaliações individuais das fontes de atrito, como do atrito existente entre os pistões e o cilindro e das outras fontes de atrito, tornam-se impossíveis.

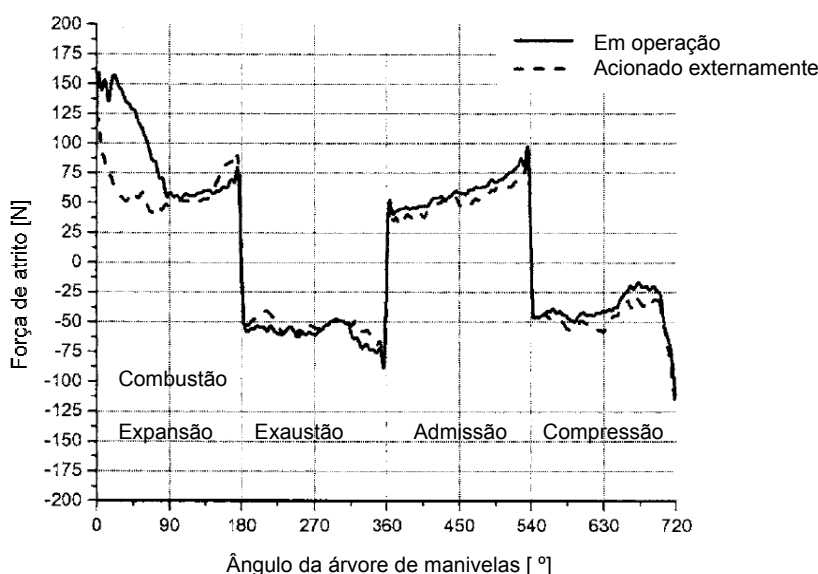
##### *4.5.1.2 Acionamento externo do motor*

Outro método bastante difundido e muito utilizado, principalmente por sua simples execução, é o de acionar externamente o motor, através de um motor ou dinamômetro elétrico. Deve-se tomar o cuidado para colocar o motor na condição de operação mais próxima possível da real. Assim, tanto a água como o óleo do motor devem ser aquecidos até a temperatura de trabalho. No caso de motores ciclo Otto, a válvula de aceleração borboleta deve estar posicionada na condição desejada.

Além de sua simplicidade, uma das maiores vantagens deste método é o de permitir avaliar cada fonte de perda mecânica separadamente. Conforme a Figura 23, o motor pode ser ensaiado diversas vezes, sendo desmontado progressivamente após cada teste.

No entanto, este método possui uma forte desvantagem. Como o motor está sendo acionado sem que ocorra combustão, somente a pressão de compressão atuará no pistão. Por este motivo, todo o conjunto pistão, biela e manivela será menos solicitado. Além disso, como a temperatura da câmara e da parede do cilindro estão menores, a condição de lubrificação existente pode ser outra. Como consequência a estimativa das perdas por atrito através deste método tende a ser menor.

Mufti (2005) do Instituto de Tribologia de Leeds na Inglaterra publicou um trabalho, no qual os métodos de acionamento externo e de pressão de atrito média efetiva são comparados. Para facilitar a comparação dos resultados, o autor utilizou um motor de quatro tempos e um único cilindro.

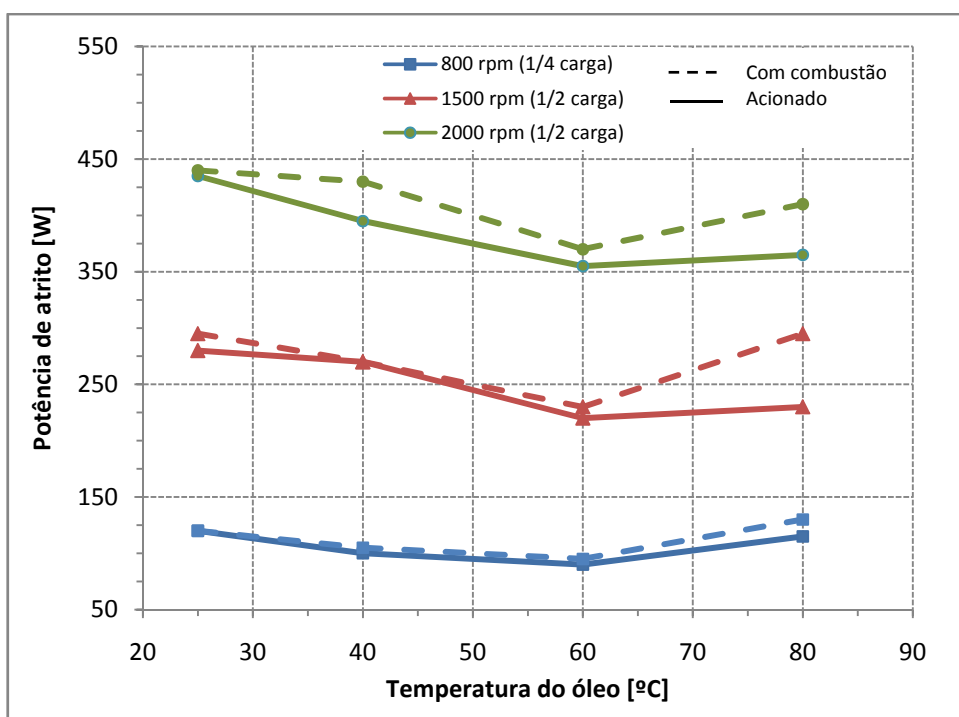


**Figura 23. Comparativo da força de atrito do motor operando com combustão e sendo acionado externamente em função do ângulo da árvore de manivelas**  
 Fonte: MUFTI, R.: 2005, p.835, v.127

A medição instantânea da força de atrito no conjunto pistão e biela para cada posição da árvore de manivelas pode ser analisada na Figura 23. Verifica-se

que a elevada variação existente entre um método e outro está na fase de expansão, onde o carregamento no pistão é maior devido à combustão. Durante o resto do ciclo, diferenças são observadas por conta de variações na temperatura do óleo.

Neste estudo, avaliou-se também a influência da temperatura do óleo para ambos os métodos. A Figura 24 traz uma interessante comparação das perdas por atrito em função da temperatura do óleo, rotação e carga do motor. Nota-se que na rotação de marcha lenta do motor (800 rpm) e baixa carga, praticamente nenhuma variação é observada. No entanto, em rotações e cargas maiores, verificam-se variações de até 60 W.



**Figura 24. Comparativo da potência de atrito do motor operando com combustão e sendo acionado externamente em função da temperatura do óleo e da rotação**

Fonte: MUFTI, R.: 2005, p.835, v.127

De acordo com Mufti (2005), quando o óleo está a 80 °C, a baixa viscosidade do lubrificante resulta em uma lubrificação elastohidrodinâmica, principalmente na fase da expansão. No entanto Mufti (2005) defende que, para avaliações com grau de precisão menor, o método de acionar o motor externamente pode ser utilizado. Porém, deve-se condicionar o motor com combustões na condição ensaiada e acioná-lo logo em seguida para que a temperatura do óleo local

não reduza significativamente, de tal forma que a similaridade da lubrificação seja mantida.

Em resumo, o método de acionamento externo do motor é recomendado para analisar a parcela de atrito existente entre componentes que não recebem solicitações diretamente da combustão. Comparações entre cabeçotes de motor e bombas de água e óleo, por exemplo, podem ser realizados sem que haja perda de representatividade.

#### *4.5.1.3 Desligamento de cilindro (Método de Morse)*

O ensaio de desligamento de cilindro possui o mesmo princípio do método de acionamento externo do motor. Em ambos os casos, o atrito existente no motor é avaliado sem a ocorrência da queima de combustível. No caso anterior, o motor é monitorado sem que nenhum cilindro esteja funcionando. Já no método de Morse, somente um dos cilindros é desligado temporariamente.

As variações de potência do motor são avaliadas à medida que cada um dos seus cilindros é desligado. Quando a queima do cilindro é interrompida, a rotação do motor deve ser mantida constante, de modo a determinar a variação de potência na mesma condição de funcionamento.

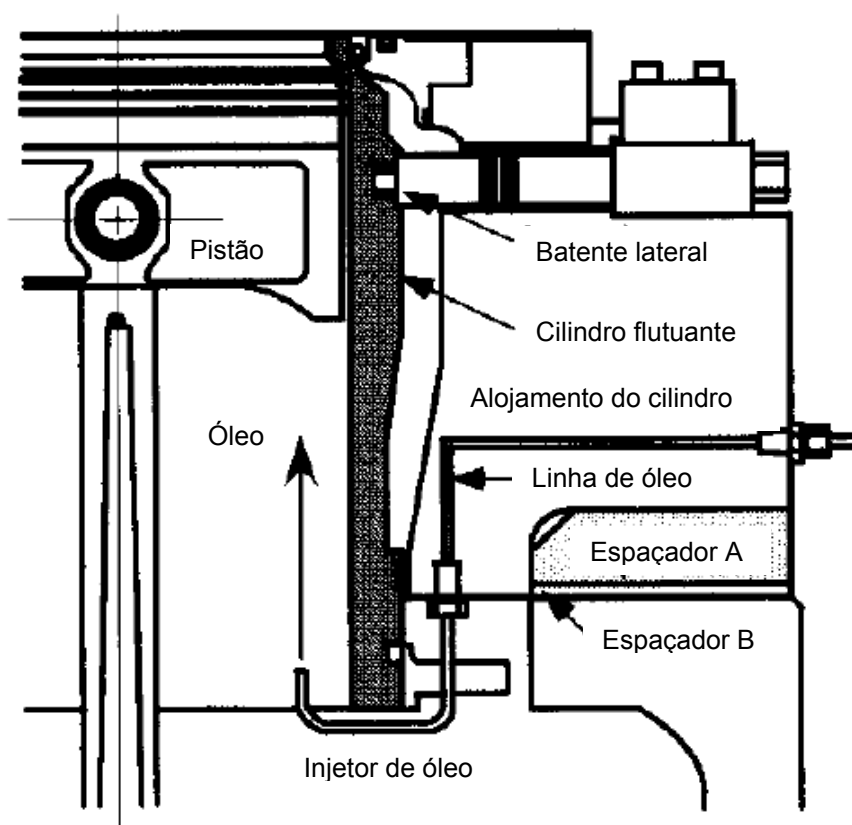
Como neste caso os valores de potência de atrito são obtidos em uma condição mais próxima do funcionamento real do motor, os resultados tendem a ser mais próximos dos verdadeiros. No entanto, ainda se verifica pequena variação, posto que o carregamento em alguns dos mancais sofre alteração. Outra desvantagem deste método é a não possibilidade de se realizar ensaios com o motor desmontado, verificando as parcelas de perda de cada componente.

#### *4.5.1.4 Cilindro flutuante*

Finalmente, apresenta-se o método de medição através de cilindro flutuante. Tal método trata-se, sem dúvida, do mais preciso e melhor, dentre as formas de determinação experimental das perdas por atrito existentes no conjunto pistão e anéis. Trata-se da única forma efetiva de medir diretamente o atrito entre o pistão e o cilindro, com o motor em funcionamento.

Para a execução deste tipo de ensaio, faz-se necessária a construção de um motor especial, cujo bloco permita a movimentação vertical de seu cilindro. O pistão, ao se deslocar ao longo do cilindro, pressiona sua parede lateralmente, fazendo o cilindro movimentar-se na direção vertical devido ao atrito existente. Extensômetros montados entre o cilindro e o bloco, impedem grandes movimentações do cilindro e medem o esforço imposto a eles, determinando, assim, a força de atrito diretamente.

O dispositivo utilizado por Wakabayashi (2003) para a avaliação do atrito existente no conjunto pistão, é apresentado na Figura 25. Nota-se que um batente lateral impede a movimentação do cilindro na direção perpendicular ao movimento do pistão, bem como um espaçador permite pequenas movimentações verticais do conjunto. Tal dispositivo é composto por um cilindro e foi construído no Instituto de Tecnologia de Musashi.



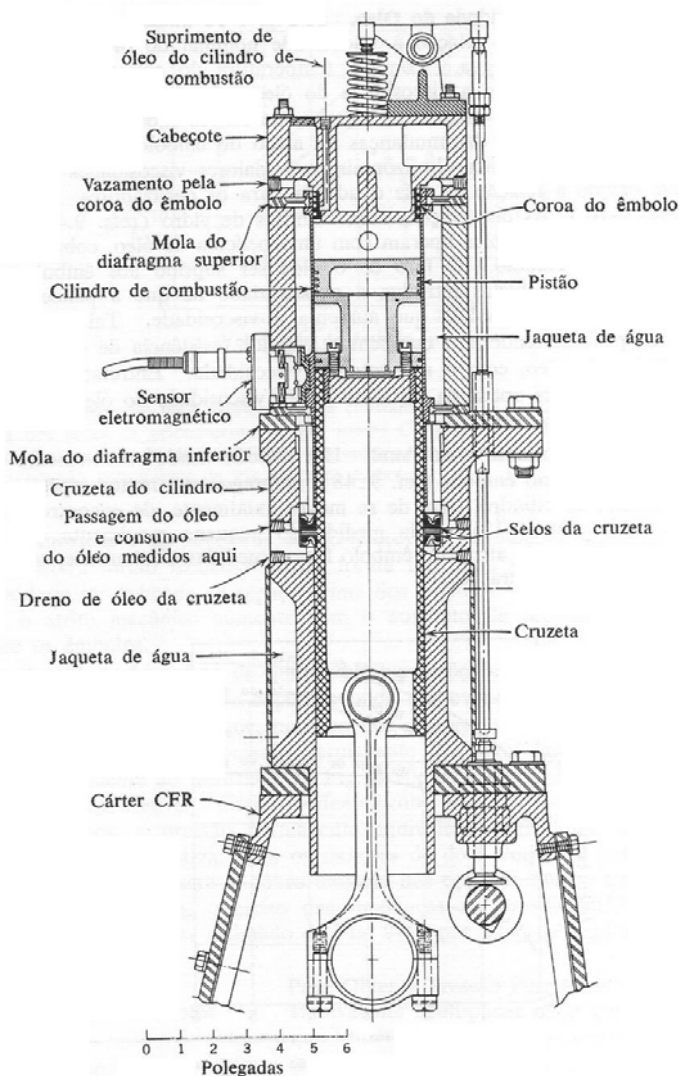
**Figura 25. Seção de um bloco de motor com dispositivo de medição de atrito do pistão baseado no método da camisa flutuante**  
 Fonte: WAKABAYASHI, R. et al.: 2003, p.22

Além de permitir a fiel avaliação das perdas por atrito no pistão, este método permite, também, medir a força de atrito a cada instante do ciclo do motor. Isto é



possível, pois os valores são obtidos diretamente, sem a necessidade de tratamento posterior.

Outro dispositivo, que utiliza o mesmo princípio de medição, foi apresentado por Taylor (1971). Como se trata de um conjunto mais antigo, de 1944, os valores de atrito são obtidos através da extensão de molas, que hoje foram substituídas pelos extensômetros. Além disso, para permitir a movimentação do cilindro, eram necessários conjuntos maiores e pistões com maiores massas. Assim, os valores obtidos sofriam variações devido a inércia do conjunto. A figura abaixo apresenta o dispositivo.



**Figura 26. Motor de pesquisa de atrito do conjunto pistão e anéis com cilindro flutuante suportado por molas**

Fonte: TAYLOR, C.: 1971, p.332 v.1

No entanto, a medição das perdas por atrito através de cilindros flutuantes possui uma grande desvantagem. O equipamento necessário para medição é de construção complexa e elevado custo. Variações como diâmetro do cilindro, curso do pistão e comprimento de biela, acarretam, geralmente, a necessidade de construção de um novo dispositivo. Além disso, tais motores para medição possuem, normalmente, apenas um cilindro.

#### 4.5.2 Métodos preditivos

Ao contrário dos métodos experimentais para determinação do atrito do motor, os métodos preditivos têm como característica reduzir a complexidade, bem como os custos e o tempo necessário, para estudos nesta área. Com o intuito de obter resultados cada vez mais próximos da realidade, modelos matemáticos são constantemente desenvolvidos e aprimorados ao longo dos anos.

A simulação numérica da dinâmica secundária do pistão iniciou-se décadas atrás. Os primeiros trabalhos desenvolvidos não consideravam nem a lubrificação existente, tampouco a deformação dos pistões. Estudos realizados por Griffiths (1964) e por Laws et al. (1972) apud Frene et. al (1990) não alcançaram resultados de grande fidelidade, devido à não consideração do filme hidrodinâmico.

Um pouco mais tarde, algumas investigações começaram a considerar o efeito da deformação dos pistões como em Sander et. al (1979) apud Mansouri (2005). No entanto, a lubrificação era, ainda, desconsiderada. Por este motivo, os valores previstos, para o atrito existente entre pistão e cilindro, não eram confiáveis, embora a avaliação dos pistões quanto a sua durabilidade fosse mais fidedigna.

O primeiro estudo a considerar ambos os efeitos de deformação e lubrificação elastohidrodinâmica foi realizado no final da década de oitenta por Oh (1987) apud Mansouri (2005). No entanto, verifica-se que, de acordo com a abordagem pretendida, a deformação do pistão pode ser desconsiderada sem maiores perdas dos resultados. Para a determinação do atrito entre pistão e cilindro, têm-se como principais fatores o filme hidrodinâmico e o contato metal-metal.

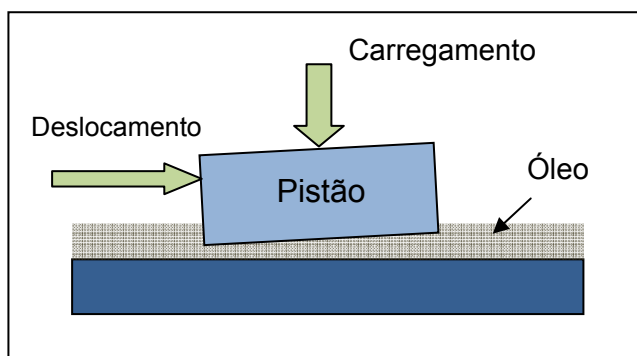
É possível afirmar que um dos principais trabalhos foi realizado por Zhu et. al (1992). Ao delimitar o foco de análise do sistema somente ao problema específico da saia do pistão, bem como à dinâmica de movimentação secundária do pistão, o

autor viabilizou a construção de um modelo de ampla aplicação e análise relativamente simples. Assim, o trabalho desenvolvido por Zhu (1992) é a base para a análise realizada a seguir.

#### 4.6 Lubrificação

Um dos problemas iniciais, no estudo das perdas por atrito das superfícies internas dos motores, é a correta consideração do tipo de lubrificação existente, bem como da teoria que melhor representa o fenômeno em questão. O principal ponto é a grande variação das forças envolvidas.

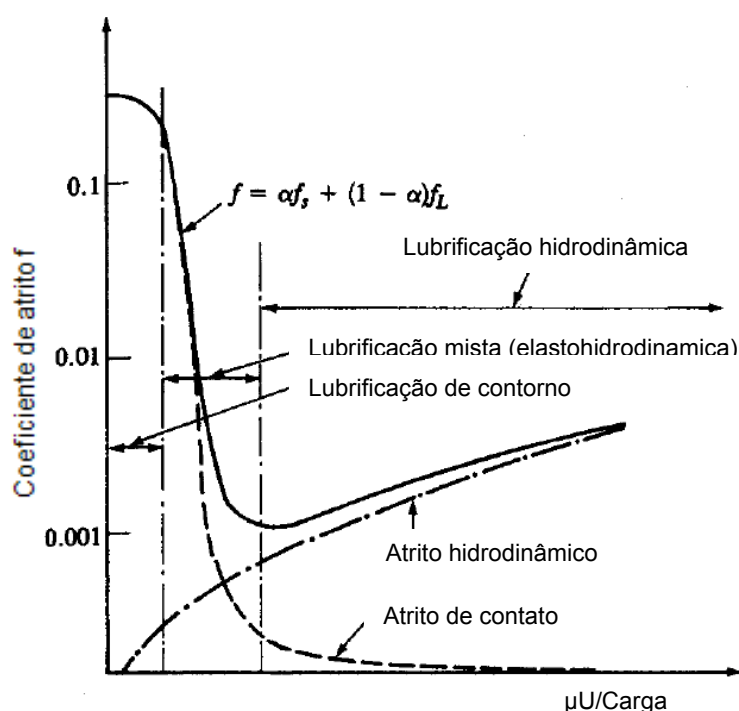
Para o caso específico do pistão, a condição de operação pode ser esquematizada como apresenta a Figura 27. Tem-se, portanto, um mancal de deslizamento, onde uma superfície inclinada, representando o pistão, desliza sobre uma superfície separada por um filme hidrodinâmico. Adicionalmente, como o carregamento que age no pistão varia bruscamente durante o ciclo, principalmente devido à combustão dos gases, o regime de lubrificação pode variar.



**Figura 27. Esquema da condição de operação do pistão e o cilindro do motor**

Fonte: Elaborado pelo autor

Os diferentes regimes existentes podem ser apresentados através do diagrama de Stribeck, obtido pela primeira vez em 1902. O eixo das abscissas do diagrama indica a relação existente entre a velocidade relativa, a viscosidade do fluido e da carga unitária. Assim, quanto maior a velocidade do fluido ou a velocidade relativa entre as partes, maior o índice e maior a predominância do filme hidrodinâmico.

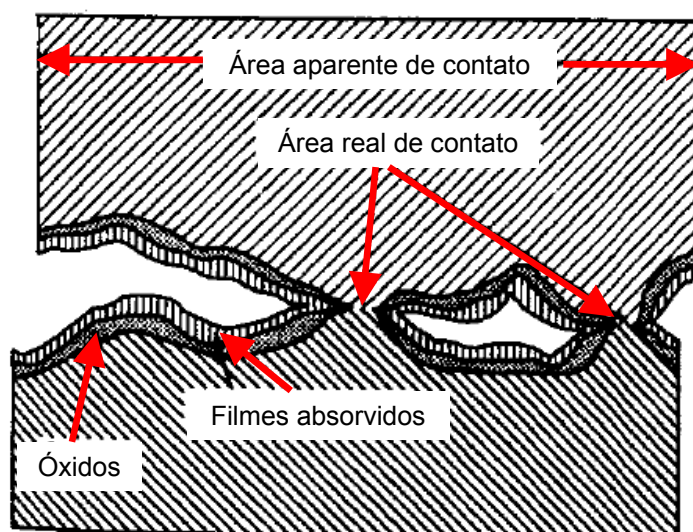


**Figura 28. Diagrama de Stribeck – Coeficiente de atrito em função da relação entre viscosidade do fluido, velocidade relativa e da carga unitária**

Fonte: HEYWOOD, J.: 1988, p.717

São estabelecidos três regimes de lubrificação, os quais variam de acordo com a velocidade relativa, o carregamento e a viscosidade do fluido. Para elevados carregamentos, da ordem de 2 GPa, a zona de lubrificação de contorno (*boundary lubrication*) corresponde a pressões extremas. Nestes casos, as superfícies são protegidas por filmes produzidos através de forças intermoleculares de aditivos, predominando o atrito de contato.

Em carregamentos intermediários, a lubrificação encontra-se na zona mista ou elastohidrodinâmica. Nesta condição, verifica-se uma transição entre os regimes de lubrificação. Os efeitos de atrito de contato são misturados com os efeitos dos atritos hidrodinâmicos. Os efeitos hidrodinâmicos descritos por Reynolds, apud Frene et. al. (1990), passam, então, a se tornar importantes. A Figura 29 apresenta um esquema de duas superfícies em regime misto de lubrificação. Nota-se que existem regiões onde as superfícies são separadas pelo filme de óleo, bem como regiões onde ocorre o contato metal com metal.



**Figura 29. Duas superfícies esquemáticas sob regime de lubrificação mista**

Fonte: HEYWOOD, J.: 1988, p.717

Finalmente, tem-se a última zona onde ocorre a predominância do atrito hidrodinâmico. Nesta condição de baixas cargas e pressões, o fenômeno também é descrito pela equação de Reynolds. No entanto, nesta região, as superfícies são totalmente separadas pelo filme de óleo.

No caso do pistão, verificam-se regimes mistos e totalmente hidrodinâmicos, dependendo do instante do ciclo do motor, onde a velocidade do pistão é reduzida e o carregamento é elevado por conta da combustão. Para analisar os fenômenos envolvidos, deve-se utilizar, como apresentado a seguir, a teoria de Reynolds, a qual pode ser aplicada para ambas as condições.

#### **4.7 Pressão hidrodinâmica**

Considerando a importância da lubrificação hidrodinâmica na construção de um modelo matemático da dinâmica do pistão, pretende-se aqui realizar uma apresentação da teoria envolvida na avaliação da pressão hidrodinâmica existente entre a saia e o cilindro do motor. Assim, realiza-se a seguir uma breve explanação das equações e hipóteses adotadas.

#### 4.7.1 Equações gerais

As equações gerais da lubrificação hidrodinâmica para fluidos Newtonianos podem ser escritas em diferentes formas. Além disso, uma equação generalizada do mecanismo do filme existente permite a determinação das características do fluxo, especialmente a sua capacidade de suportar cargas, cuja determinação é aqui o principal objetivo.

Será analisada a seguir uma das formas da equação de Reynolds. De acordo com Frene et. al. (1990), Osborne Reynolds estabeleceu, em 1886, as bases da teoria moderna da lubrificação hidrodinâmica.

Na primeira parte de seu trabalho, Reynolds apud Frene et. al. (1990), estabelece que quando um filme de lubrificante consegue separar totalmente duas superfícies, o atrito não é diretamente proporcional à velocidade relativa. De acordo com o autor, o aumento da velocidade propicia o aumento da temperatura do filme, que por sua vez, leva a uma redução da viscosidade existente no filme. Já na segunda parte de seu trabalho, Reynolds realiza uma análise física da capacidade de carregamento devido à conservação do fluxo do lubrificante através das superfícies de controle.

A equação geral para definir a lubrificação hidrodinâmica, desenvolvida por Reynolds, é obtida através das equações da continuidade e de Navier-Stokes. Assim, tem-se inicialmente a equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad (10)$$

onde:

$\rho$  = Massa específica do fluido [kg/m<sup>3</sup>];

$t$  = Tempo [s];

$x_i$  = Coordenada do sistema na direção  $i$  [m];

$u_i$  = Velocidade na direção  $i$  [m/s].

A equação (10) pode então ser escrita da seguinte forma após a integração através da espessura do filme de óleo:

$$\int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dz + \int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} dz = 0 \quad (11)$$

onde:

$z$  = Coordenada na direção  $z$  perpendicular ao filme [m];

$H_1$  = Coordenada  $y$  da superfície inferior [m];

$H_2$  = Coordenada  $y$  da superfície superior [m].

Admitindo os termos viscosos dominantes, as equações de Navier-Stokes são reduzidas e obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_h}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial p_h}{\partial y} &= \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ \frac{\partial p_h}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

onde:

$p_h$  = Pressão hidrodinâmica [Pa];

$\mu$  = Viscosidade dinâmica do fluido [Ns/m<sup>2</sup>];

$u$  e  $v$  = Velocidade nas direções  $x$  e  $y$  [m/s].

Para validar as considerações realizadas acima, deve-se avaliar o número de Reynolds do escoamento em questão. Tem-se que:

$$Re = \frac{\rho U h}{\mu} \quad (13)$$

onde:

$Re$  = Número de Reynolds;

$U$  = Velocidade relativa [m/s];

$h$  = Espessura do filme lubrificante [m].

Valores típicos para o problema aqui estudado são da ordem de  $10^{-3}$ . De fato:

$$Re = \frac{0,92 \times 12 \times 10E^{-6}}{0.016} \rightarrow Re = 0,0069 \quad (14)$$

Desta forma, dado o pequeno número de Reynolds calculado, o regime do filme hidrodinâmico é considerado como laminar e as considerações válidas.

Dando continuidade à dedução, as equações (12) são integradas, admitindo que não exista escorregamento do fluido nas superfícies sólidas, obtendo-se expressões das velocidades  $u$  e  $v$ . Tais velocidades são então introduzidas na equação de continuidade obtendo-se, finalmente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p_h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p_h}{\partial y} \right) \\ = 6\rho(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 6\rho(V_1 - V_2) \frac{\partial h}{\partial y} + 6h \frac{\partial}{\partial x} \{ \rho(U_1 - U_2) \} \\ + 6h \frac{\partial}{\partial y} \{ \rho(V_1 - V_2) \} + 12\rho W_2 + 12h \frac{\partial p_h}{\partial t} \end{aligned} \quad (15)$$

onde:

$h$  = Espessura do filme lubrificante [m];

$U_1$  e  $V_1$  = Velocidades da superfície inferior nas direções  $x$  e  $y$  [m/s];

$U_2$  e  $V_2$  = Velocidades da superfície superior nas direções  $x$  e  $y$  [m/s];

$W_2$  = Velocidade da superfície superior na direção  $z$  perpendicular ao filme [m/s].

Esta equação representa a forma mais geral da equação de Reynolds, constituindo-se como base para o estudo da lubrificação hidrodinâmica. Para sua formulação são feitas as seguintes hipóteses:

- o meio analisado é contínuo;
- a espessura do filme é muito pequena comparada com as outras dimensões;
- o fluido é Newtoniano;
- o regime é laminar;
- as forças de massa, assim como, as forças de inércia são desprezíveis;
- a velocidade na direção normal ao filme é pequena, comparada com as velocidades nas direções paralelas ao filme;

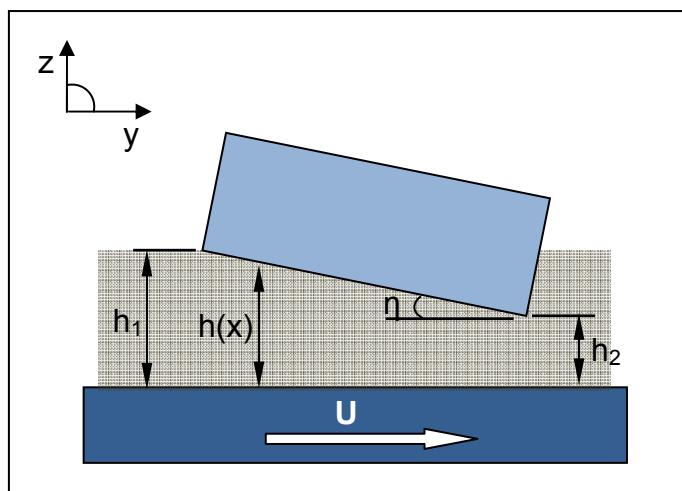


- nenhum escorregamento ocorre entre o fluido e as superfícies de contato.

#### 4.7.2 Duas superfícies não paralelas

Como neste trabalho pretende-se analisar um caso específico de lubrificação, a equação (15) pode ser simplificada de modo a melhor representar o fenômeno em questão. O caso da lubrificação existente entre a saia do pistão e o cilindro pode ser tratado como o de duas superfícies não paralelas com movimentação entre si, posto que o pistão é articulado em sua fixação com a biela.

Desta forma, considera-se o fluxo entre duas superfícies não paralelas e planas, com largura infinita ao longo de Oz. A parte inferior é uniforme com velocidade igual a zero, enquanto a superfície superior está inclinada em relação ao plano xOy com ângulo  $\eta$  e velocidade  $V_1 = U$ , conforme a Figura 30. Adicionalmente, admite-se que tanto a massa específica, como a viscosidade, do fluido são constantes ao longo do filme.



**Figura 30. Duas superfícies não paralelas com filme de óleo entre elas**

Fonte: Elaborado pelo autor

Consequentemente, a equação de Reynolds para este caso uniaxial pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{d}{dy} \left( h^3 \frac{dp_h}{dy} \right) = 6\mu U \frac{dh}{dy} \quad (16)$$

ou:

$$\frac{dp_h}{dy} = 6\mu U \frac{h - h^*}{h^3} \quad (17)$$

onde:

$U$  = Vel. relativa entre as duas superfícies separadas pelo filme [m/s];

$h^*$  = Espessura do filme no ponto onde o gradiente de pressão é nulo [m].

Nesta última,  $h^*$  representa a espessura do filme no ponto  $y^*$  onde o gradiente de pressão é zero e a equação (17) torna-se de fácil resolução analítica. Ao integrá-la de acordo com as condições de contorno impostas, obtém-se:

$$p_h = \frac{6\mu U}{\tan \eta} \left[ \frac{1}{h} - \frac{1}{h^2} \frac{h_1 h_2}{(h_1 + h_2)} - \frac{1}{(h_1 + h_2)} \right] \quad (18)$$

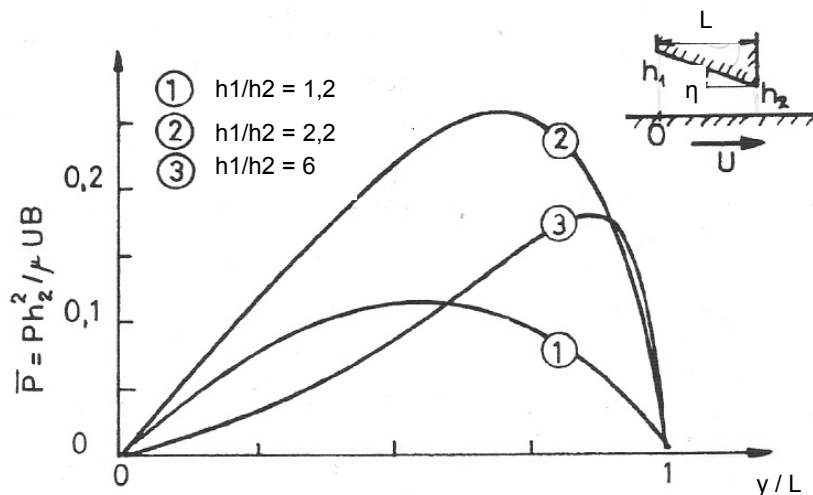
onde:

$\eta$  = Ângulo entre as duas superfícies separadas pelo filme [°];

$h_1$  = Espessura do filme de óleo no início da superfície [m];

$h_2$  = Espessura do filme de óleo no final da superfície [m].

A partir da equação (18), é possível realizar algumas análises do fenômeno. Assim, a Figura 31 apresenta um comparativo da distribuição de pressão para três diferentes relações entre  $h_1$  e  $h_2$ .



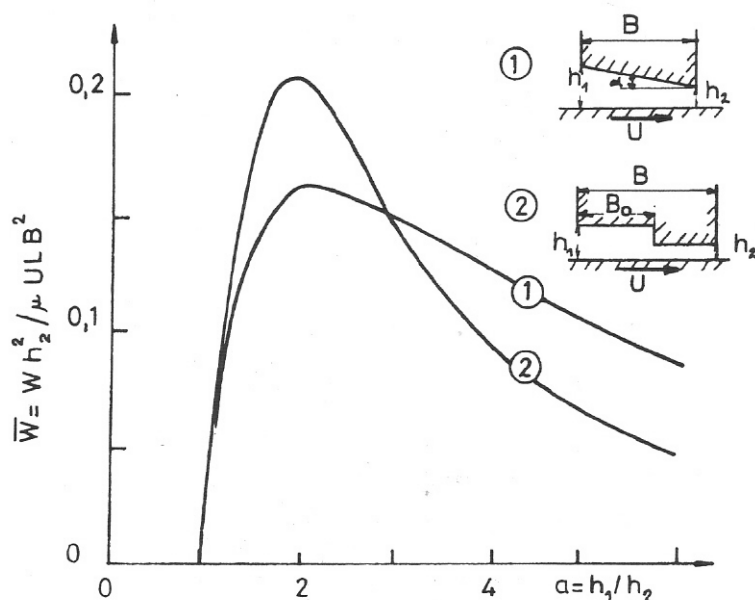
**Figura 31. Distribuição de pressão em função da relação  $h_1/h_2$**

Fonte: Frene, J. et. al.: 1990, p.74

Verifica-se que para relações próximas de 1 a distribuição é simétrica ao longo de B. À medida que o ângulo aumenta, consequentemente aumentando a

relação “ $h_1/h_2$ ”, verifica-se o aumento no valor máximo de pressão, bem como uma assimetria da distribuição. Valores elevados de “ $h_1/h_2$ ” resultam em forte assimetria e queda do valor máximo de pressão. Nota-se também que o valor máximo de pressão é encontrado nas proximidades do ponto onde a espessura do filme é menor.

Ainda referente à relação “ $h_1/h_2$ ”, pode-se dela analisar a capacidade de carga do filme. Constata-se que quando  $h_1$  é igual a  $h_2$ , esta capacidade é nula. Seu valor máximo é atingido quando a relação está em torno de dois. A Figura 32 apresenta os valores obtidos.



**Figura 32. Capacidade adimensional de carga em função da relação  $a=h_1/h_2$**

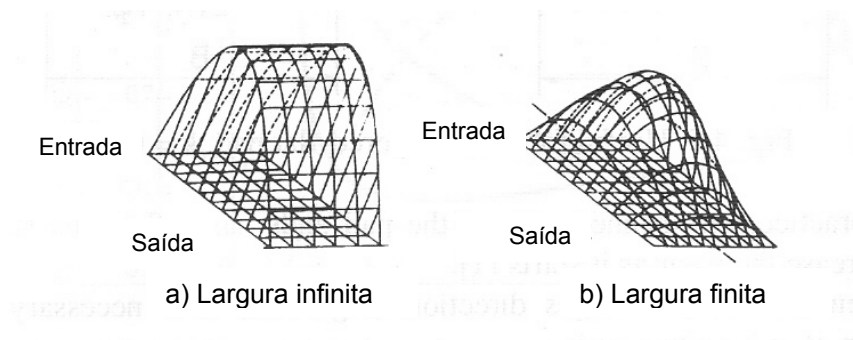
Fonte: Frene, J. et. al.: 1990, p.75

No entanto, a superfície da saia do pistão não pode ser considerada com largura infinita, como neste estudo que trata de um caso bi-dimensional. Assim sendo, a largura da superfície deve ser levada em consideração. Outra característica da saia do pistão é a sua angulação em relação à superfície do cilindro que varia em função do tempo e de sua posição, ao longo de sua trajetória vertical.

A equação (16) pode, então, ser reescrita na seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p_h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h^3 \frac{\partial p_h}{\partial y} \right) = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial y} + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (19)$$

Sob tais circunstâncias, existe um fluxo na direção perpendicular ao movimento das superfícies que implica na redução da pressão no filme de óleo. A Figura 33 apresenta uma comparação entre uma distribuição com largura infinita e uma distribuição com largura finita.



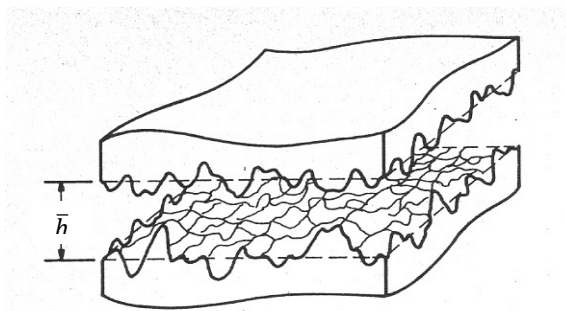
**Figura 33. Comparativo de distribuição de pressões**

Fonte: Frene, J. et. al.: 1990, p.92

Em contra partida, a equação (19) não possui resolução analítica. Diversas soluções aproximadas foram desenvolvidas, mas estas implicam em erros significativos de cálculo em certas condições. Por este motivo, sua resolução deve ser realizada através de métodos numéricos.

#### 4.7.3 Efeito da rugosidade das superfícies

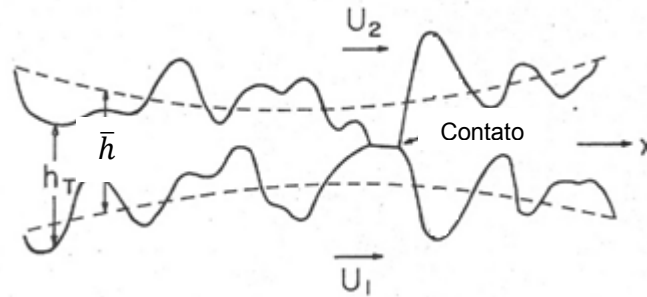
Conforme já apresentado anteriormente, a superfície da saia do pistão não é totalmente lisa e possui certa rugosidade proveniente do processo de usinagem. Sabe-se também que tal rugosidade possui influência direta na lubrificação existente e, conseqüentemente, na pressão hidrodinâmica. A equação (19) deve, então, ser mais uma vez reescrita de modo a contemplar as características do fenômeno analisado.



**Figura 34. Representação esquemática da rugosidade superficial**

Fonte: Patir, N; Cheng, H.: 1978, p.14

Neste caso, a espessura local do filme ( $h_T$ ) pode ser definida em função da rugosidade local de cada uma das superfícies e de espessura nominal ( $\bar{h}$ ), conforme mostra a Figura 35.



**Figura 35. Espessura do filme hidrodinâmico**

Fonte: Patir, N; Cheng, H.: 1978, p.12

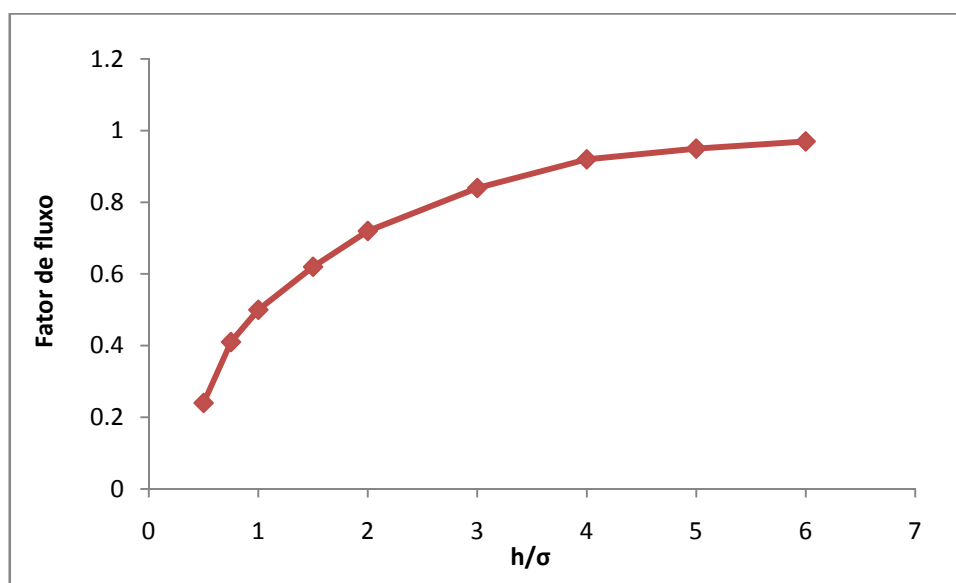
Define-se, então, a relação entre a espessura do filme e as variações relativas à rugosidade das superfícies. Para casos onde  $\bar{h}$  seja no mínimo três vezes maior que tais variações ( $h_T \text{ máximo}/h_T \text{ mínimo} < 3$ ), os efeitos da rugosidades podem ser desprezados e a equação (19) pode ser utilizada. No entanto, à medida que esta variação de  $h_T$  aumenta, os picos de cada superfície começam a interagir entre si, tornando o efeito da rugosidade significativo. Mesmo assim, o regime de lubrificação ainda é considerado como hidrodinâmico.

Para solucionar o problema da rugosidade existente, Patir (1978) reescreveu a equação de Reynolds, através de simulações de fluxo, de modo a permitir análises com regime de lubrificação parcial e relações entre espessura nominal e rugosidade menores que 3. Assim, definem-se dois fatores de fluxo ( $\Phi_x$  e  $\Phi_y$ ) e um fator de cisalhamento do fluxo ( $\Phi_s$ ). A equação (20) é então obtida.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \Phi_x h^3 \frac{\partial p_h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Phi_y h^3 \frac{\partial p_h}{\partial y} \right) = 6\mu U \left( \frac{\partial h}{\partial y} + \Omega \frac{\partial \Phi_s}{\partial y} \right) + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (20)$$

Os fatores  $\Phi_x$  e  $\Phi_y$  são, portanto, comparativos entre as pressões médias de um fluxo em uma superfície rugosa e de um fluxo em uma superfície lisa, para cada uma das direções. O fator de cisalhamento representa o fluxo adicional devido ao deslizamento sobre uma superfície rugosa.

Nota-se também da equação (20) que uma vez que a relação entre a espessura e a ondulação da superfície tende ao infinito, a influência da rugosidade se reduz e os fatores de fluxo tendem a 1. Como consequência, a equação (20) retorna a sua forma original. Patir (1978) realizou em seu trabalho um comparativo dos fatores de fluxo para superfícies isotrópicas<sup>5</sup> em função desta relação. Verifica-se que para relações acima de 6, o valor do fator de fluxo torna-se muito próximo a 1, conforme apresentado no gráfico da Figura 36.



**Figura 36. Os fatores de fluxo para uma superfície isotrópica**  
 Fonte: Patir, N; Cheng, H.: 1978, p.15

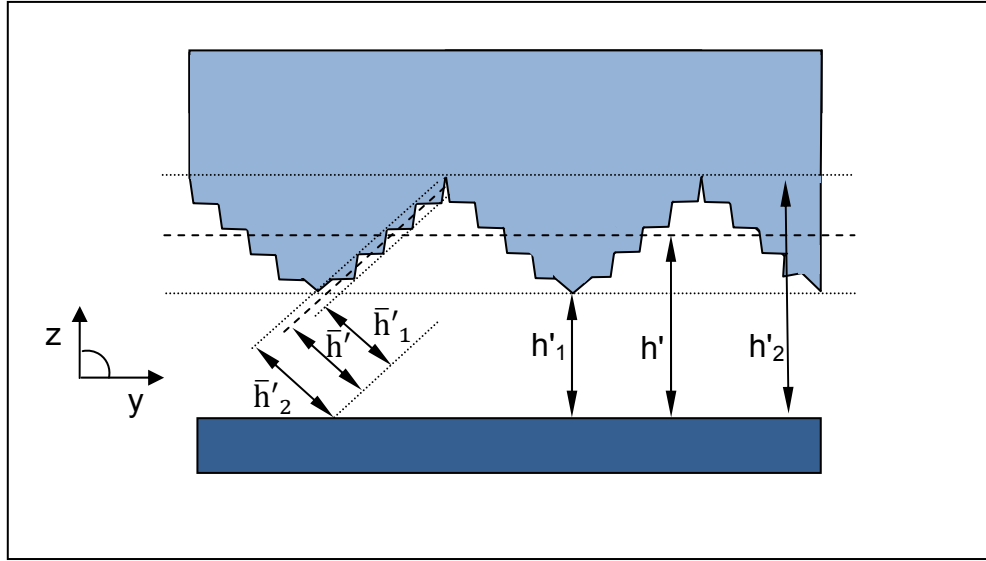
#### 4.7.3.1 Fatores de fluxo para a superfície do pistão

Obtida a equação que considera os efeitos da rugosidade superficial, deve-se, então, definir os fatores de fluxo para o caso da lubrificação da saia do pistão.

Da Figura 14 pode-se notar que a superfície pode ser aproximada pela forma dos dentes de um serrote. Verificam-se dentes maiores e principais, denominadas ondulações, e imperfeições secundárias de menor magnitude, denominadas aqui de rugosidade. Um esquema das imperfeições, a ser utilizado na definição numérica dos fatores, é apresentado na Figura 37.

---

<sup>5</sup> No presente contexto, superfícies isotrópicas são superfícies nas quais a rugosidade é semelhante para ambas as direções de fluxo e os fatores  $\Phi_x$  e  $\Phi_y$  são iguais.



**Figura 37. Imperfeição da saia do pistão**

Fonte: Elaborado pelo autor

Com base na interpretação esquemática podem-se definir as expressões das magnitudes das ondulações e das rugosidades da superfície respectivamente:

$$\Omega = \frac{(h'_2 - h'_1)}{2} \quad (21)$$

e:

$$\sigma = \frac{(\bar{h}'_2 - \bar{h}'_1)}{2} \quad (22)$$

A partir das equações (21) e (22), Zhu et al. (1991) desenvolveram soluções analíticas para os fatores de fluxo considerando somente a ondulação, somente a rugosidade e para ambas as imperfeições combinadas, de modo a estudar os efeitos destes parâmetros na lubrificação hidrodinâmica. A obtenção de tais fatores não é o foco deste trabalho, que se limita a apresentar e implementar as equações obtidas.

Inicialmente são apresentadas as equações para os fatores de fluxo na direção (y) perpendicular à orientação das imperfeições.

- Somente para rugosidade:

$$\Phi_y = \left[ 1 - \left( \frac{\sigma}{h} \right)^2 \right]^2 \quad (23)$$

- Somente para ondulação:

$$\Phi_y = \left[ 1 - \left( \frac{\Omega}{h} \right)^2 \right]^2 \quad (24)$$

- Rugosidade e ondulação combinadas:

$$\Phi_y = \frac{[(h + \Omega)^2 - \sigma^2][(h - \Omega)^2 - \sigma^2]}{h^4} \times \left\{ 1 - \frac{\sigma^2}{4\Omega} \left[ \frac{h + \Omega}{(h + \Omega)^2 - \sigma^2} - \frac{h - \Omega}{(h - \Omega)^2 - \sigma^2} \right] - \frac{3\sigma^2}{8\Omega} \text{Ln} \right\} \quad (25)$$

As equações para os fatores de fluxo na direção (x) (da orientação das imperfeições) são, por sua vez:

- Somente para rugosidade:

$$\Phi_x = 1 + \left( \frac{\sigma}{h} \right)^2 \quad (26)$$

- Somente para ondulação:

$$\Phi_x = 1 + \left( \frac{\Omega}{h} \right)^2 \quad (27)$$

Finalmente, apresentam-se as equações para os fatores de cisalhamento conforme segue.

- Somente para rugosidade:

$$\Phi_s = \frac{\sigma}{h} \quad (28)$$

- Somente para ondulação:

$$\Phi_s = \frac{\Omega}{h} \quad (29)$$



- Rugosidade e ondulação combinadas:

$$\Phi_s = \frac{[(h + \Omega)^2 - \sigma^2][(h - \Omega)^2 - \sigma^2]}{8\Omega^3 h^2} \times \text{Ln} \left\{ 2\Omega - \frac{\sigma^2}{2} \left[ \frac{h + \Omega}{(h + \Omega)^2 - \sigma^2} - \frac{h - \Omega}{(h - \Omega)^2 - \sigma^2} \right] - \frac{3\sigma^2}{4} \text{Ln} \right\} \quad (30)$$

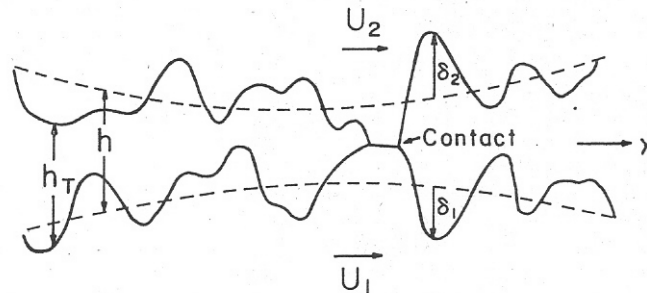
onde:

$$\text{Ln} = \frac{1}{\sigma} \ln \left[ \frac{(h - \Omega - \sigma)(h + \Omega + \sigma)}{(h - \Omega + \sigma)(h + \Omega - \sigma)} \right] \quad (31)$$

#### 4.8 Pressão de contato

Conforme analisado anteriormente a condição de lubrificação, existente entre a saia do pistão e o cilindro, alterna entre regimes mistos e regimes totalmente hidrodinâmicos. Assim, de acordo com as condições de carga e rotação do motor, a capacidade de carregamento do filme hidrodinâmico pode não ser suficiente para sustentar os esforços aplicados ao pistão provenientes da combustão. Nestes instantes verificam-se, então, condições de contato entre o pistão e o cilindro do motor.

Sabe-se ainda que a superfície do pistão possui irregularidades. Desta forma, conforme apresenta a Figura 38, nos instantes em que a espessura do filme lubrificante diminui significativamente, os picos das imperfeições da superfície do pistão entram em contato com o cilindro.



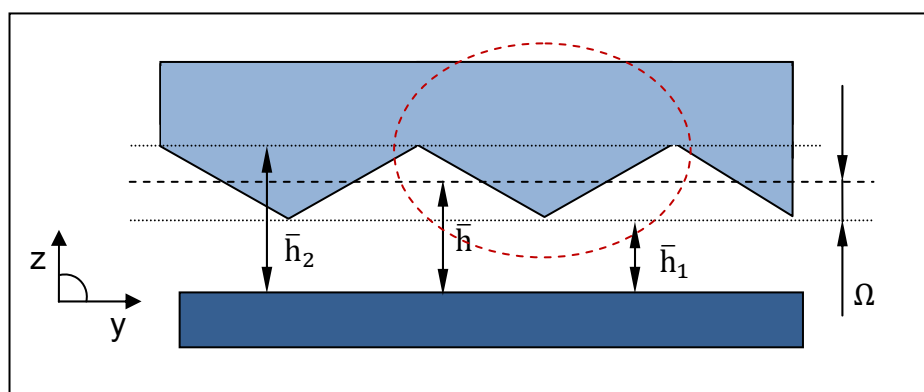
**Figura 38. Espessura do filme hidrodinâmico**

Fonte: Patir, N; Cheng, H.: 1978, p.12

A seguir, são apresentadas as equações que modelam o fenômeno de contato entre o cilindro e o pistão, e que permitem avaliar a pressão de contato.

#### 4.8.1 Pressão de contato na superfície do pistão

Mais uma vez, as imperfeições da superfície da saia do pistão, apresentadas na Figura 14, podem ser aproximadas por perfis semelhantes a dentes de serrate. Para o caso da pressão de contato somente são consideradas as imperfeições principais, denominadas de ondulações conforme mostra a Figura 39 abaixo.



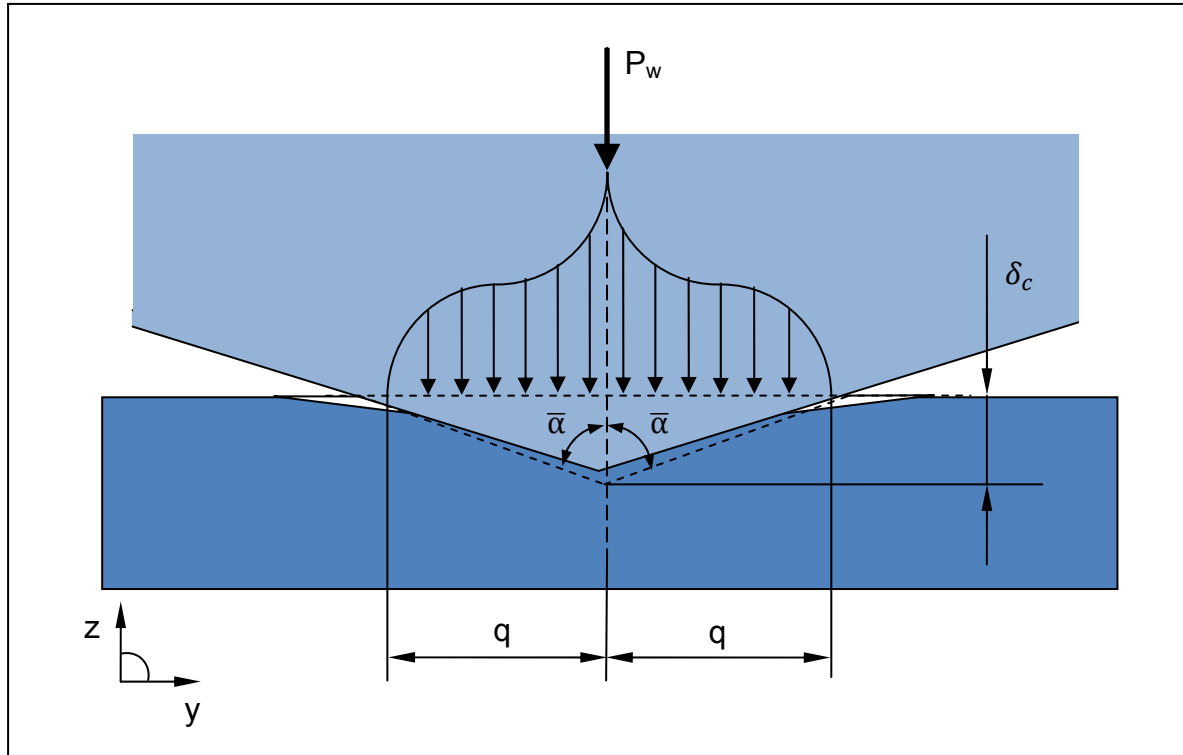
**Figura 39. Detalhe da ondulação da superfície da saia**

Fonte: Elaborado pelo autor

Tem-se como foco de análise, determinar a pressão de contato existente ao longo da ondulação da saia do pistão. Assim, dadas as dimensões características das imperfeições, deve-se avaliar a interação de uma superfície com uma descontinuidade brusca, onde o perfil de cada onda pode ser aproximado por um perfil de cunha bi-dimensional, no qual o semi-ângulo é próximo de  $90^\circ$ .

Adicionalmente, uma vez que os deslocamentos envolvidos são pequenos, admite-se que as deformações evidenciadas estarão dentro do regime elástico dos materiais. Por tais hipóteses, o fenômeno estudado pode ser descrito pela teoria de contato elástico, não Hertziano, para cunhas e pontas cônicas.

Conforme apresenta a Figura 40 a seguir, considera-se uma cunha atingindo uma superfície plana de forma que a região de contato seja pequena comparada com as dimensões de ambos os sólidos.



**Figura 40. Detalhe do contato metal com metal entre a saia do pistão e o cilindro do motor.**

Fonte: Johnson, K. L.: 1985, p.112

De acordo com Johnson (1985), “assume-se que a distribuição de pressão entre dois corpos elásticos, cujos perfis são contínuos ao longo da borda da área de contato, devem-se reduzir continuamente até zero quando nestas bordas”. Portanto, a força de contato por unidade de comprimento pode ser definida como:

$$P_w = qE' \cot(\bar{\alpha}) \quad (32)$$

onde:

$P_w$  = Força de contato por unidade de comprimento [N/m];

$q$  = Largura da metade da área de contato [m];

$E'$  = Módulo de elasticidade efetivo [Pa];

$\bar{\alpha}$  = Ângulo na extremidade das ondulações [°].

De forma semelhante, a distribuição da pressão de contato ao longo da zona de interesse é dada por Johnson (1985):

$$\bar{p}_w(y) = \frac{E'}{2\pi \tan(\bar{\alpha})} \ln \left[ \frac{q + (q^2 - x^2)^{0.5}}{q - (q^2 - x^2)^{0.5}} \right] \quad (33)$$

onde:

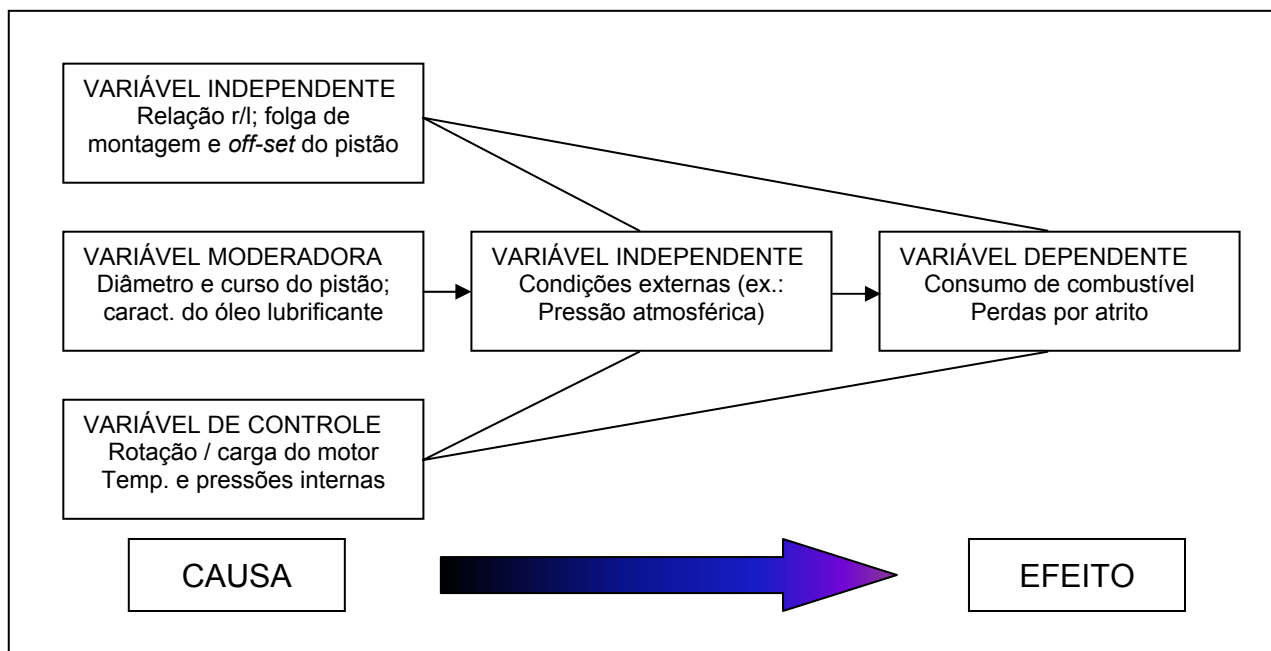
$\bar{p}_w$  = Pressão de contato por unidade de comprimento [N/m<sup>3</sup>].

Ao analisar a equação (33), verifica-se a existência de uma singularidade, tendendo ao infinito quando “y” é igual a zero, bem como tendendo a zero a medida que “y” se aproxima de q.

## 5 METODOLOGIA

O método de pesquisa utilizado é analítico-teórico, com uso de ferramenta de modelagem e simulação numérica, de modo a trazer flexibilidade e permitir a análise de diversas alternativas sem que seja necessária a construção de protótipos. Os modelos de simulação “fornecem respostas rápidas e abrangentes, permitindo que o analista faça experimentos com grande número de previsões e hipóteses, sem gastar muito tempo” (ANDRADE, 2007, p.17).

Inicialmente foram coletados, informações e características necessárias para gerar um banco de dados e possibilitar a formulação do problema e modelamento do sistema. De acordo com Andrade (2007), esta etapa é muito importante pois define a validade e a confiabilidade dos resultados que serão obtidos. Foi então realizada uma pesquisa documental em livros específicos da área de dinâmica de fluidos, mecânica de contato, bem como de métodos numéricos além de artigos publicados por engenheiros da indústria automotiva.



**Figura 41. Variáveis de análise e suas relações**

Fonte: Elaborada pelo autor

Em seguida ocorreu a fase de implementação. De posse do modelo matemático, rotinas de cálculo foram desenvolvidas de modo a implementá-lo

numericamente. O *software* utilizado em todo o desenvolvimento e como plataforma para as simulações foi o Matlab<sup>®</sup>. Ao final desta fase foram realizadas validações da rotina de modo a verificar a convergência do modelo. Como dados de entrada foram utilizados aqueles apresentados por Zhu (1992) de modo a permitir uma base de comparação segura.

Finalmente deu-se início à fase de análise paramétrica do conjunto, bem como ao estudo dos resultados obtidos. Nesta etapa foram estudadas as respectivas influências de alguns parâmetros e características do motor. A Figura 41 apresenta as relações de causa e efeito das variáveis de análise.

Deve-se destacar a utilização da análise comparativa de modelos, “[...] amplamente utilizada na otimização de produtos e processos” (JUNG, 2004, p.120). Assim sendo, os resultados obtidos foram confrontados com o motor atualmente em produção, o qual será considerado como referência. De acordo com Jung (2004, p.120), “[...] torná-se-a cientificamente inválida a pesquisa tecnológica que utilizar um processo de análise e discussão dos resultados somente a partir dos dados obtidos particularmente, desconsiderando um padrão ou controle existente”.

Por fim, dentre as possibilidades estudadas, um conjunto de alterações mais vantajoso e com menor impacto no sistema é selecionado. Espera-se assim, que este conjunto possa ser aplicado em novos projetos, permitindo melhorar o rendimento do motor e reduzindo o consumo de combustível.

## **5.1 Pressupostos**

O estudo é fundamentado nos seguintes pressupostos:

- A redução das perdas por atrito existentes na saia dos pistões leva à redução do consumo de combustível.
- A soma dos efeitos individuais de pequenas modificações construtivas do conjunto biela-manivela gera uma redução perceptível do consumo de combustível.

## 6 DESCRIÇÃO DO SISTEMA

Após finalizada a apresentação dos principais conceitos envolvidos no desenvolvimento, bem como da metodologia aplicada, pretende-se aqui realizar uma descrição do sistema analisado, suas características e considerações necessárias para o modelamento matemático. Conforme já mencionado, o presente desenvolvimento consiste na implementação de um modelo pré-existente e testado, para posterior análise paramétrica da dinâmica do pistão em um caso aplicado.

A descrição a seguir consiste no sistema utilizado por Zhu (1992) no desenvolvimento de seu modelo matemático. Trata-se de um sistema e modelo confiável e consolidado nesta área de estudo, tendo sido já utilizado por outros autores como Liu (1998), Mansouri (2004), Balakrishnan (2004) e Meng (2006).

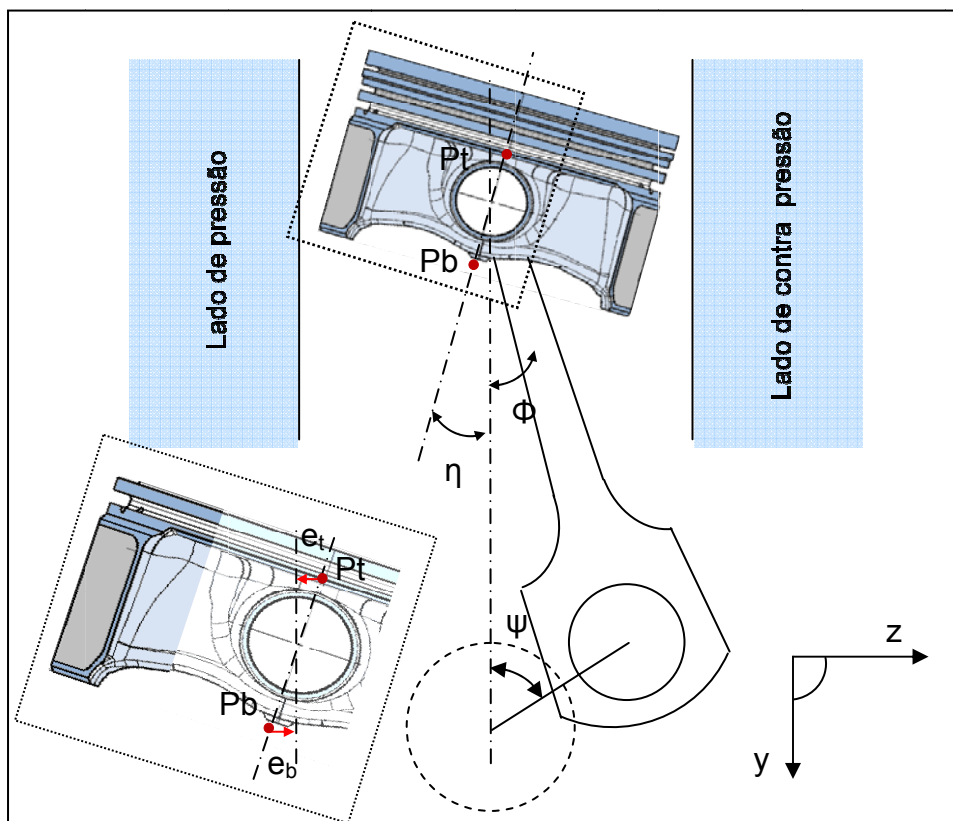
O sistema é composto por cilindro do motor, pistão, biela e a árvore de manivelas. Considerando que a análise realizada em um cilindro é válida para todos os outros, o sistema é composto somente por um cilindro, de modo a reduzir a capacidade de processamento necessária. Assim, os resultados obtidos podem ser estendidos aos demais cilindros.

### 6.1 Coordenadas do sistema

Inicialmente faz-se necessária a definição das coordenadas e dimensões do sistema, de modo a facilitar o desenvolvimento e discussões a seguir. Uma vez que a análise está focada na saia do pistão, grande parte destas coordenadas está relacionada ao pistão em si.

O modelo proposto por Zhu (1992) trata de um sistema dissipativo com dois graus de liberdade, o qual analisa os movimentos perpendiculares do pistão em relação ao eixo do cilindro. Desta forma, suas coordenadas generalizadas são definidas como a excentricidade ( $e_t$ ) do ponto Pt localizado no eixo do pistão cuja coordenada y, aqui medida ao longo do eixo do cilindro, é igual ao do topo da saia e a excentricidade ( $e_b$ ) do ponto Pb localizado no eixo do pistão cuja coordenada y é igual ao da base da saia. A diferença entre tais coordenadas define o ângulo ( $\eta$ ) do

pistão em relação ao eixo do cilindro do motor, conforme é apresentado na Figura 42. Devido à pequena a folga existente entre o pistão e o cilindro, tais movimentos são muito restritos, porém de grande interesse.



**Figura 42. Esquema do sistema pistão, biela e manivela utilizado**

Fonte: Elaborado pelo autor.

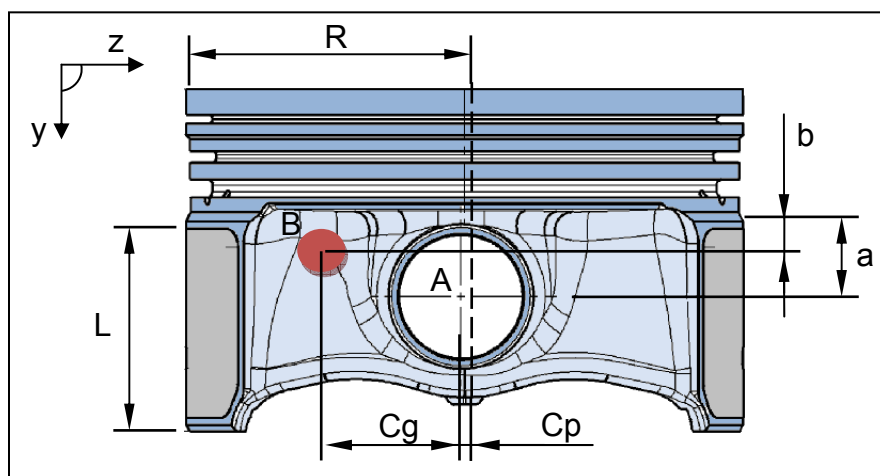
A posição da árvore de manivelas é determinada pelo ângulo  $\psi$ . A partir de seu conhecimento e da equação da cinemática do pistão, a posição, a velocidade e a aceleração do pistão na direção  $y$  são diretamente obtidas. Já o ângulo da biela ( $\Phi$ ) define a direção da força aplicada contra o pistão durante a sua movimentação.

A Figura 43 e a Figura 44 apresentam as principais dimensões do pistão necessárias ao desenvolvimento. Na Figura 43, é possível notar a existência das linhas de centro do pistão e do centro do furo para pino. O *offset* do pistão é definido como  $C_p$ .

Ainda na Figura 43, a circunferência existente indica o centro de gravidade do pistão, definido pelo ponto B, cuja projeção de distância ao ponto A na direção  $z$ , localizado no centro do furo para pino do pistão, é indicada por  $C_g$ . A projeção de



distância entre o ponto B e o ponto A na direção  $y$  é indicada por  $b$ . Já raio do pistão é denominado  $R$ .

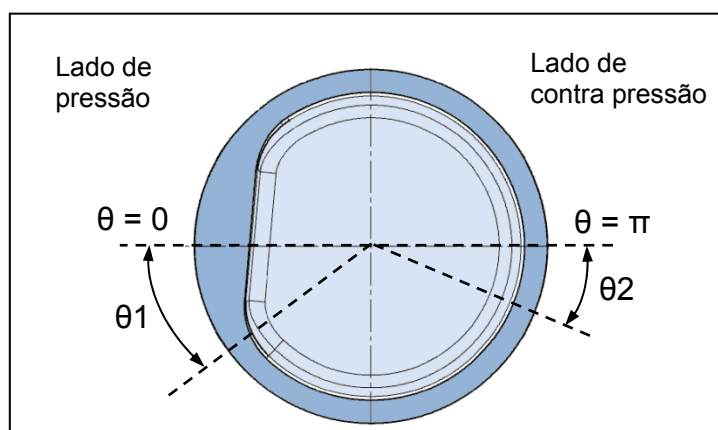


**Figura 43. Principais dimensões utilizadas do pistão**

Fonte: Elaborado pelo autor.

Faz-se agora necessária a definição das dimensões das saias de pressão e contra pressão do pistão. Ambas as saias possuem mesma altura, sendo definidas por  $L$  e posicionadas em relação ao centro do furo para pino pela dimensão “ $a$ ”, que define a distância (na direção  $y$ ) entre a parte superior da saia e o ponto A.

No entanto, as larguras possuem dimensões diferentes. Desta forma, a largura do lado de pressão é determinada por duas vezes o produto do raio do pistão pelo ângulo  $\theta_1$ , uma vez que a saia é simétrica e centralizada em  $\theta = 0$ . Já a largura da saia do lado de contra pressão é determinada por duas vezes o produto do raio do pistão pelo ângulo  $\theta_2$  e centralizada em  $\theta = \pi$ .



**Figura 44. Dimensões das larguras das saias do pistão**

Fonte: Elaborado pelo autor.

## 6.2 Considerações realizadas

Para o modelamento matemático do sistema apresentado anteriormente, bem como para sua implementação, são necessárias pressupostos e considerações. Tais pressupostos pretendem reduzir a complexidade do problema estudado, mantendo a validade dos resultados obtidos. Admitem-se:

*- Velocidade angular do motor constante*

Devido à variação da pressão na câmara de combustão, ao longo do ciclo, bem como às variações das forças resistivas do motor, como o trem de válvula ou o próprio conjunto pistão-biela, a velocidade angular do motor oscila em torno de uma velocidade angular média, durante seu funcionamento. No entanto, a magnitude desta oscilação é pequena quando comparada à velocidade angular média do motor.

*- Atrito entre pistão e pino é desprezível*

O atrito existente entre o furo para pino do pistão e o pino tende a dificultar a rotação do pistão em torno dele. Porém tal resistência imposta à rotação do pistão é considerada desprezível, uma vez que as forças que agem na saia do pistão, rotacionando-o, têm magnitude extremamente superiores.

*- Anéis não influenciam na dinâmica lateral do pistão*

Como já comentado inicialmente, o conjunto de anéis do pistão é responsável, assim como o pistão, por grande parcela das perdas por atrito do motor. No entanto, como os anéis são montados pressionados contra a parede do cilindro e possuem ligeira folga do fundo dos canaletos do pistão, considera-se que a dinâmica lateral do pistão não é influenciada de forma significativa. Consequentemente, o conjunto de anéis não é considerado neste estudo.

*- Evolução da curva de pressão de combustão constante de ciclo para ciclo*

Admite-se que a curva da pressão de combustão é sempre a mesma de ciclo para ciclo. Além disso, considera-se que as alterações a serem realizadas no conjunto pistão e biela não afetam a combustão. Uma vez que a dinâmica do pistão

ao longo do eixo do cilindro e o formato da câmara de combustão não são alterados, a velocidade de queima da mistura permanecerá inalterada.

*- Pressão de combustão igual entre cilindros*

Com o intuito de facilitar a análise dos resultados e permitir sua extrapolação para os demais cilindros do motor, considera-se que a curva de pressão de combustão seja igual em todos os cilindros. Esta consideração não está muito longe da realidade, uma vez que a construção dos coletores visa a atingir-se a maior semelhança possível entre os rendimentos volumétricos de cada cilindro.

*- Lubrificação do tipo misto*

Conforme já apresentado anteriormente, o regime de lubrificação varia ao longo dos quatro ciclos do motor, entre hidrodinâmico e misto.

*- Temperatura do óleo lubrificante constante*

Apesar das temperaturas de trabalho do pistão e do cilindro do motor serem ligeiramente diferentes, considera-se aqui que a temperatura do óleo lubrificante é constante e uniforme em toda superfície do cilindro do motor, bem como no interior do filme existente entre a saia do pistão e a parede do cilindro. Tal consideração é plausível, pois as variações de temperatura existentes não geram grandes mudanças nas propriedades do óleo e não afetam, portanto, o fenômeno estudado.

*- Pistão rígido*

Assim como o cilindro do motor, o pistão, em seu funcionamento normal, sofre deformações devido aos esforços a ele submetidos. No entanto, a construção de um modelo matemático que leve em consideração a rigidez estrutural do pistão demandaria grandes recursos e enorme tempo. Tal fato eliminaria o objetivo principal deste modelo, o de ser de simples e rápida implementação, impossibilitando a análise paramétrica do fenômeno e tornando a análise experimental mais indicada. Desta forma, assim como em Zhu (1992), far-se-á uso de um modelo dinâmico de corpo rígido.

*- Dilatação térmica desprezível*

Assim como na hipótese anterior, busca-se com esta consideração reduzir a complexidade de implementação do modelo da dinâmica secundária do pistão. A partir da folga nominal, da temperatura de trabalho do pistão e de estudos já realizados quanto à sua deformação térmica, é possível considerar uma folga de trabalho média que leve em consideração os efeitos da temperatura.

*- Rugosidade do cilindro do motor desprezível*

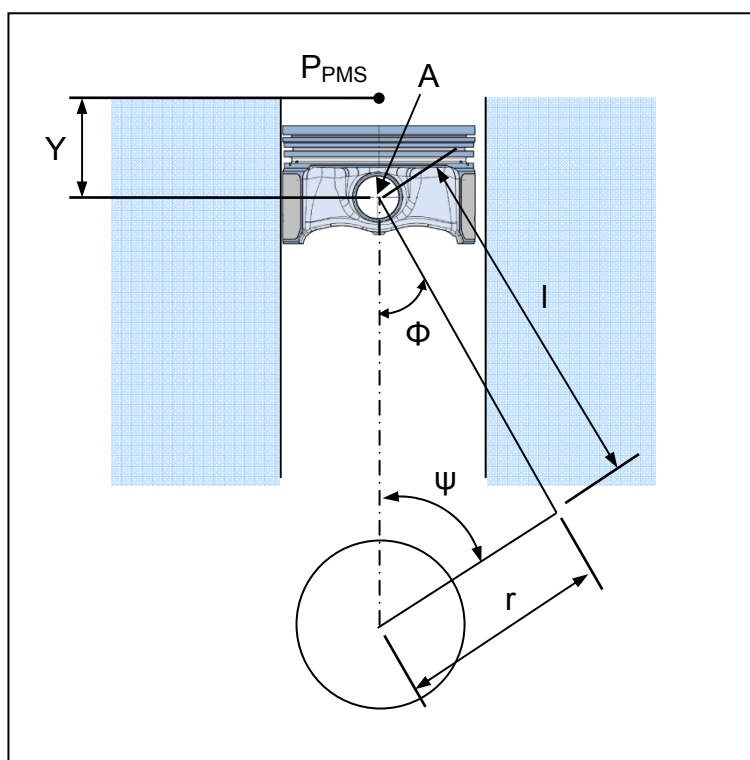
Conforme apresentado anteriormente, a rugosidade do cilindro, bem como a rugosidade do pistão, são fatores muito importantes na lubrificação. Porém, tendo em conta a magnitude da rugosidade da superfície da saia do pistão, é possível considerar o efeito da rugosidade do cilindro desprezível. A rugosidade do cilindro é importante para garantir a existência do filme de óleo em toda sua extensão, mas são os efeitos da rugosidade da saia que possuem papel principal na definição das perdas.

## 7 MODELO MATEMÁTICO

A partir da descrição do sistema a ser aplicado, bem como das considerações realizadas, torna-se possível a elaboração do modelo matemático. O modelo apresentado a seguir trata, basicamente, do modelo desenvolvido por Zhu (1992), que é implementado neste trabalho.

### 7.1 Cinemática do pistão

O primeiro passo para a formulação do modelo matemático deve ser a definição da equação que determina a cinemática vertical do pistão, que, conforme comentado, depende exclusivamente da posição da árvore de manivelas. A Figura 45 apresenta um esquema com as dimensões do sistema.



**Figura 45. Parâmetros geométricos do mecanismo**

Fonte: Elaborado pelo autor.

É então possível escrever a expressão que determina a distância do ponto A do pistão ao ponto  $P_{PMS}$ , definido como a posição do ponto A quando o pistão se encontra no PMS, conforme segue:

$$Y = [(l + r)^2 - C_p^2]^{0,5} - [l^2 - (C_p + r \sin \psi)^2]^{0,5} - r \cos \psi \quad (34)$$

onde:

$l$  = Comprimento da biela (distância entre olhais) [m];

$r$  = Raio da árvore de manivelas [m];

$C_p$  = *Offset* do pistão [m];

$\psi$  = Ângulo da árvore de manivelas [°].

A velocidade angular da árvore de manivelas é admitida constante e igual a:

$$\dot{\psi} = \omega \quad (35)$$

Derivando-se a equação (34) obtém-se a expressão para a velocidade vertical do ponto A do pistão:

$$\dot{Y} = r \omega \sin \psi + r \omega (C_p + r \sin \psi) \cos \psi [l^2 - (C_p + r \sin \psi)^2]^{-0,5} \quad (36)$$

Finalmente, deriva-se a equação (36) para se obter a equação que determina a aceleração do ponto A na mesma direção:

$$\begin{aligned} \ddot{Y} = & r \omega^2 \cos \psi + [r \omega (C_p + r \sin \psi) \cos \psi]^2 [l^2 - (C_p + r \sin \psi)^2]^{-1,5} \\ & + [(r \omega (C_p + r \sin \psi) \cos \psi)^2 \\ & - r \omega^2 (C_p + r \sin \psi) \sin \psi] [l^2 - (C_p + r \sin \psi)^2]^{-0,5} \end{aligned} \quad (37)$$

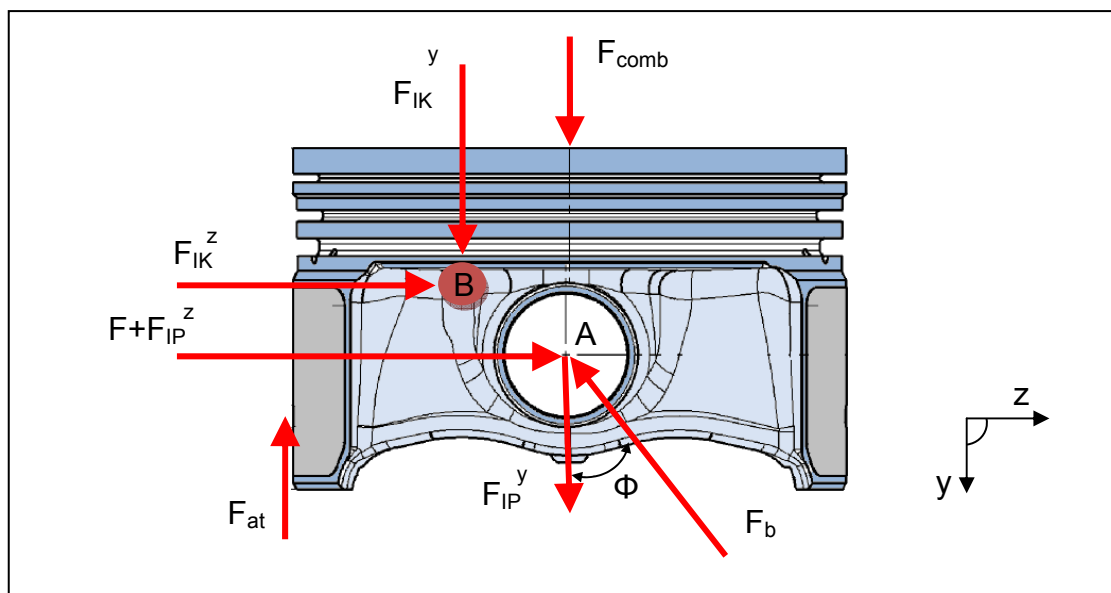
Desta forma, a cinemática do pistão na direção do eixo do cilindro do motor está totalmente definida.

## 7.2 Sistema de equações diferenciais

Em seguida faz-se necessária a dedução do sistema de equações diferenciais do movimento do problema em questão, bem como das forças excitantes que agem diretamente no pistão, gerando assim sua movimentação vertical e lateral. Tais forças são divididas aqui em dois grupos: forças e momentos.

### 7.2.1 Forças excitantes

Para facilitar a compreensão das forças e das expressões que as definem, é apresentado na Figura 46 um esquema com a aplicação de cada uma delas.



**Figura 46. Esquema das forças que atuam no pistão**

Fonte: Elaborado pelo autor.

As forças verticais podem ser analisadas separadamente das forças horizontais. Na direção  $y$  tem-se, da segunda Lei de Newton:

$$\sum F_y = m_T a_y \quad (38)$$

onde:

$m_T$  = Massa total do conjunto [kg];

$a_y$  = Aceleração do ponto A na direção  $y$  [ $m/s^2$ ].

E ainda:

$$m_T = m_{pis} + m_{pin} \quad (39)$$

onde:

$m_{pis}$  = Massa do pistão [kg];

$m_{pin}$  = Massa do pino do pistão [kg].

De acordo com o apresentado pelo esquema da Figura 46, na direção y são aplicadas as forças de combustão, de atrito e da biela, das quais decorre a aceleração. A partir das equações (37), (38) e (39) é possível então obter:

$$F_{Comb} + F_{at} + F_b \cos \phi = (m_{pis} + m_{pin})\ddot{y} \quad (40)$$

onde:

$F_{comb}$  = Força da combustão dos gases [N];

$F_{at}$  = Forças de atrito na saia do pistão [N];

$F_b$  = Força da biela;

$\phi$  = Ângulo da biela em relação ao eixo do cilindro [°].

As forças de atrito que agem na saia do pistão podem ainda ser subdivididas em forças de atrito hidrodinâmico e atrito seco, na forma:

$$F_{at} = F_{ah} + F_{as} \quad (41)$$

onde:

$F_{ah}$  = força de atrito hidrodinâmico [N];

$F_{as}$  = força de atrito seco [N].

Finalmente o ângulo da biela em relação ao eixo do cilindro pode ser determinado pela seguinte expressão:

$$\phi = \tan^{-1} \left\{ (C_p + r \sin \psi) \left[ l^2 - (C_p + r \sin \psi)^2 \right]^{-0,5} \right\} \quad (42)$$

Com as equações (40) e (42) fica equacionado o modelo na direção y, restando, então, equacionar o movimento na direção z. Tem-se, portanto:



$$\sum F_z = m_{pis}a_{pis}^z + m_{pin}a_{pin}^z \quad (43)$$

onde:

$a_{pis}^z$  = Aceleração do ponto B na direção z [m/s<sup>2</sup>];

$a_{pin}^z$  = Aceleração do ponto A na direção z [m/s<sup>2</sup>].

De acordo com a Figura 46, são aplicadas na direção z as forças normais às saias, as forças reativas da biela. Portanto, da equação (43) obtém-se:

$$F - F_b \sin \phi = m_{pis}a_{pis}^z + m_{pin}a_{pin}^z \quad (44)$$

onde:

$F$  = Força normal na saia do pistão [N];

$F_b$  = Força da biela [N].

Assim como as forças de atrito encontradas na direção y, as forças normais que agem na saia do pistão podem ser subdivididas em forças devido à pressão hidrodinâmica e forças devido ao contato, desta forma:

$$F = F_h + F_c \quad (45)$$

onde:

$F_h$  = Força normal devido à pressão hidrodinâmica [N];

$F_c$  = Força normal devido ao contato [N].

Já, as acelerações do pistão e do pino do pistão na direção z podem ser determinadas em função das excentricidades ( $e_b$  e  $e_t$ ) do pistão. Determina-se inicialmente a posição na direção z do ponto B do pistão, localizado em seu centro de gravidade:

$$p_{pis}^z = e_t + \frac{b}{L}(e_b - e_t) \quad (46)$$

onde:

$p_{pis}^z$  = Coordenada z do ponto B [m];

$e_t$  = Excentricidade do ponto  $P_t$  com relação ao eixo do cilindro [m];

$e_b$  = Excentricidade do ponto  $P_b$  com relação ao eixo do cilindro [m];

$b$  = Distância do centro de gravidade do pistão ao ponto  $P_t$  [m];

$L$  = Comprimento da saia do pistão [m].

A aceleração do pistão na direção  $z$ , definida como a aceleração do ponto B, pode, então, ser determinada pela segunda derivada da expressão (46) no tempo. Desta forma:

$$a_{pis}^z = \frac{d^2 p_{pis}^z}{dt^2} = \ddot{e}_t + \frac{b}{L}(\ddot{e}_b - \ddot{e}_t) \quad (47)$$

onde:

$a_{pis}^z$  = Aceleração do ponto B na direção  $z$  [ $m/s^2$ ];

$\ddot{e}_t$  = Aceleração do ponto  $P_t$  na direção  $z$  [ $m/s^2$ ];

$\ddot{e}_b$  = Aceleração do ponto  $P_b$  na direção  $z$  [ $m/s^2$ ].

E de forma semelhante para o pino do pistão tem-se:

$$a_{pin}^z = \ddot{e}_t + \frac{a}{L}(\ddot{e}_b - \ddot{e}_t) \quad (48)$$

onde:

$a_{pin}^z$  = Aceleração na direção  $z$  do ponto A [ $m/s^2$ ];

$a$  = Distância na direção  $y$  do ponto A até o topo da saia do pistão [m].

Desta forma a equação (44) pode ser reescrita na forma:

$$F - F_b \sin \phi = m_{pis} \left[ \ddot{e}_t + \frac{b}{L}(\ddot{e}_b - \ddot{e}_t) \right] + m_{pin} \left[ \ddot{e}_t + \frac{a}{L}(\ddot{e}_b - \ddot{e}_t) \right] \quad (49)$$

Finalmente as equações (40) e (49) podem ser reduzidas de modo a eliminar a expressão relativa à força interna reativa da biela. Obtém-se:

$$F_s + F + F_{at} \tan \phi = m_{pis} \left[ \ddot{e}_t + \frac{b}{L}(\ddot{e}_b - \ddot{e}_t) \right] + m_{pin} \left[ \ddot{e}_t + \frac{a}{L}(\ddot{e}_b - \ddot{e}_t) \right] \quad (50)$$

onde:

$$F_s = \tan \phi [F_{Comb} - \ddot{Y}(m_{pis} + m_{pin})] \quad (51)$$

### 7.2.2 Momentos excitantes

O Teorema do Momento Angular, sob hipótese de movimento plano é escrito na forma:

$$\sum M_G = I_{\text{pis}} \ddot{\eta}_{\text{pis}} \quad (52)$$

que, fazendo uso do esquema da Figura 46, pode ser reescrita:

$$M + F_{IK}^z(a - b) - F_{IK}^y C_g + F_{comb} C_p + M_{at} = I_{\text{pis}} \ddot{\eta}_{\text{pis}} \quad (53)$$

onde:

$M$  = Momento das forças normais à saia do pistão [Nm];

$F_{IK}^z$  = Força de inércia do pistão na direção z [N];

$F_{IK}^y$  = Força de inércia do pistão na direção y [N];

$C_g$  = Distância na direção z do ponto A ao ponto B [m];

$C_p$  = Offset do pino do pistão [m];

$M_{at}$  = Momento das forças de atrito na saia do pistão [Nm];

$I_{\text{pis}}$  = Mom. de inércia do pistão em relação ao C.G. do pistão [kgm<sup>2</sup>];

$\ddot{\eta}_{\text{pis}}$  = Aceleração angular do pistão [rad/s<sup>2</sup>].

O momento proveniente das forças normais à saia do pistão pode ser subdividido em momento devido à pressão hidrodinâmica e momento devido ao contato.

$$M = M_h + M_c \quad (54)$$

onde:

$M_h$  = Momento devido a pressão hidrodinâmica [Nm];

$M_c$  = Momento devido ao contato [Nm].

Esta subdivisão também pode ser realizadas nos momentos provenientes das forças de atrito entre o cilindro do motor e a saia do pistão. Desta forma:

$$M_{at} = M_{ah} + M_{ac} \quad (55)$$

onde:

$M_{ah}$  = Momento devido ao atrito hidrodinâmico [Nm];

$M_{ac}$  = Momento devido ao atrito de contato [Nm].

Já a aceleração angular do pistão pode ser expressa da seguinte forma<sup>6</sup>:

$$\ddot{\eta} = \frac{(\ddot{e}_t - \ddot{e}_b)}{L} \quad (56)$$

Consequentemente, a partir das equações (53) e (56):

$$M - F_{IK}^y C_g + F_{comb} C_p + M_{at} = I_{pis} \frac{(\ddot{e}_t - \ddot{e}_b)}{L} - F_{IK}^z (a - b) \quad (57)$$

A equação acima pode, então, ser mais uma vez reescrita, obtendo-se a segunda equação do sistema de equações diferenciais:

$$M + M_s + M_{at} = I_{pis} \frac{(\ddot{e}_t - \ddot{e}_b)}{L} - F_{IK}^z (a - b) \quad (58)$$

onde:

$$M_s = F_{comb} C_p - F_{IK}^y C_g \quad (59)$$

As equações (51) e (58), constituem o sistema de equações diferenciais que rege a dinâmica do problema analisado. Tem-se, portanto:

$$\begin{bmatrix} m_{pin} \left(1 - \frac{a}{L}\right) + m_{pis} \left(1 - \frac{b}{L}\right) & m_{pin} \frac{a}{L} + m_{pis} \frac{b}{L} \\ \frac{I_{pis}}{L} + m_{pis}(a - b) \left(1 - \frac{b}{L}\right) & m_{pis}(a - b) \frac{b}{L} - \frac{I_{pis}}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{e}_t \\ \ddot{e}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F + F_s + F_{at} \tan \phi \\ M + M_s + M_{at} \end{bmatrix} \quad (60)$$

As seções a seguir dedicam-se ao estabelecimento das equações representativas das forças e momentos excitantes.

---

<sup>6</sup> Pode-se mostrar que as acelerações dos pontos  $P_b$  e  $P_t$  na direção do eixo do cilindro (y) são muito inferiores àquelas na direção perpendicular (z).

### 7.2.3 Pressão hidrodinâmica

O ponto de partida para determinar as forças e momentos relacionados à interação existente entre a saída do pistão e a parede do cilindro é a representação da pressão hidrodinâmica existente. De acordo com o apresentado anteriormente, a equação (20) de Reynolds representa o fenômeno estudado. Assim:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \Phi_x \bar{h}^3 \frac{\partial p_h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Phi_y \bar{h}^3 \frac{\partial p_h}{\partial y} \right) = 6\mu U \left( \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} + \Omega \frac{\partial \Phi_s}{\partial y} \right) + 12\mu \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} \quad (61)$$

onde:

$\Phi_x$  = Fator de fluxo na direção x;

$\Phi_y$  = Fator de fluxo na direção y;

$\Phi_s$  = Fator de cisalhamento do fluxo;

$\bar{h}$  = Espessura média do filme de óleo [m];

$p_h$  = Pressão hidrodinâmica na saída do pistão [N/m<sup>2</sup>];

$\mu$  = Viscosidade do óleo lubrificante [Pa.s]

$U$  = Velocidade vertical do pistão [m/s];

$\Omega$  = Ondulação da superfície da saída do pistão [m].

A expressão (61) pode ser desenvolvida, na forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Phi_x \bar{h}^3 \right) \frac{\partial p_h}{\partial x} + \left( \Phi_x \bar{h}^3 \right) \frac{\partial^2 p_h}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Phi_y \bar{h}^3 \right) \frac{\partial p_h}{\partial y} + \left( \Phi_y \bar{h}^3 \right) \frac{\partial^2 p_h}{\partial y^2} \\ = 6\mu U \left( \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} + \Omega \frac{\partial \Phi_s}{\partial y} \right) + 12\mu \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} \end{aligned} \quad (62)$$

que pode ser reordenada como:

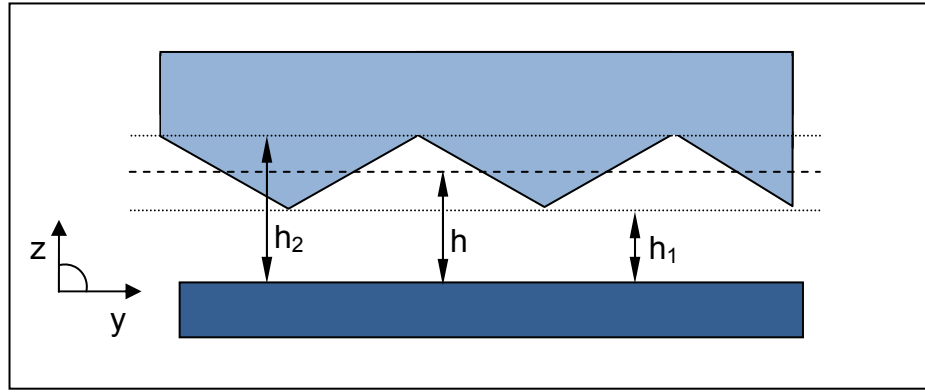
$$\alpha(x, y) \frac{\partial^2 p_h}{\partial x^2} + \beta(x, y) \frac{\partial p_h}{\partial x} + \gamma(x, y) \frac{\partial^2 p_h}{\partial y^2} + \delta(x, y) \frac{\partial p_h}{\partial y} = \varepsilon(x, y) \quad (63)$$

onde:

$$\begin{aligned} \alpha(x, y) &= \left( \Phi_x \bar{h}^3 \right) \\ \beta(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \Phi_x \bar{h}^3 \right) \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned}\gamma(x, y) &= (\Phi_y \bar{h}^3) \\ \delta(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} (\Phi_y \bar{h}^3) \\ \varepsilon(x, y) &= 6\mu U \left( \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} + \Omega \frac{\partial \Phi_s}{\partial y} \right) + 12\mu \frac{\partial \bar{h}}{\partial t}\end{aligned}$$

De acordo com Zhu (1992), o efeito da qualidade superficial da saia do pistão nas perdas por atrito, bem como na pressão hidrodinâmica, se deve principalmente à ondulação existente na superfície, visto que a rugosidade é pelo menos uma ordem menor que a ondulação. Assim sendo, as equações (24), (27) e (29) definidas por Huang (1990) podem ser utilizadas. A Figura 47 apresenta um esquema da superfície aqui considerada.



**Figura 47. Esquema da superfície da saia do pistão**

Fonte: Elaborado pelo autor

Definem-se os fatores de fluxo na direção x e y, e o fator de cisalhamento como:

$$\Phi_y = \left[ 1 - \left( \frac{\Omega}{\bar{h}} \right)^2 \right]^2 \quad (65)$$

e:

$$\Phi_x = 1 + \left( \frac{\Omega}{\bar{h}} \right)^2 \quad (66)$$

e:

$$\Phi_s = \frac{\Omega}{\bar{h}} \quad (67)$$

onde:

$$\Omega = \frac{(h_2 - h_1)}{2} \quad (68)$$

Uma vez que as excentricidades do pistão ( $e_t$  e  $e_b$ ) são, normalmente, da ordem de 0 a 50  $\mu\text{m}$ , e portanto muito menores que o comprimento da saia do pistão, a espessura média do filme de óleo em uma determinada região pode, de acordo com Zhu (1992), ser definida pela equação abaixo:

$$\bar{h} = C + e_t(t) \cos \theta + [e_b(t) - e_t(t)] \frac{y}{L} \cos \theta + f(\theta, y) \quad (69)$$

onde:

$C$  = Folga radial nominal do pistão [m];

$\theta$  = Posição na saia do pistão;

$f(\theta, y)$  = Perfil da saia do pistão.

Com base nas equações (65), (66), (67) e (69), torna-se possível escrever o termo  $\alpha(x, y)$ , da equação de Reynolds, na forma:

$$\alpha(x, y) = (\Phi_x \bar{h}^3) \rightarrow \alpha(x, y) = \left[ 1 + \left( \frac{\Omega}{\bar{h}} \right)^2 \right] \bar{h}^3 \quad (70)$$

e portanto:

$$\alpha(x, y) = \bar{h}^3 + \Omega^2 \bar{h} \quad (71)$$

De forma análoga, o termo  $\beta(x, y)$ , relativo ao fluxo de lubrificante na direção  $x$ , pode ser escrito, a partir da equação (66), como:

$$\beta(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_x \bar{h}^3) \rightarrow \beta(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (\bar{h}^3 + \Omega^2 \bar{h}) \quad (72)$$

Desenvolvendo-se a derivada parcial, tem-se:

$$\beta(x, y) = 3\bar{h}^2 \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + \Omega^2 \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \quad (73)$$

que por sua vez pode ser reescrita como:

$$\beta(x, y) = (3\bar{h}^2 + \Omega^2) \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \quad (74)$$

A coordenada  $x$  de um ponto na saia do pistão pode ser expressa (ver Figura 44) como:

$$x = \theta R \quad (75)$$

É, portanto, conveniente que a derivada de  $\bar{h}$  em relação a  $x$  seja escrita na forma:

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (76)$$

Como:

$$dx = R d\theta \quad (77)$$

Tem-se portanto:

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} \frac{1}{R} \quad (78)$$

Finalmente escreve-se  $\beta(x, y)$  como:

$$\beta(x, y) = (3\bar{h}^2 + \Omega^2) \frac{1}{R} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} \quad (79)$$

onde:

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} = -e_t(t) \sin \theta - [e_b(t) - e_t(t)] \frac{y}{L} \sin \theta \quad (80)$$

O termo  $\gamma(x, y)$ , depende do fator de fluxo na direção do movimento vertical do pistão. Da equação (65):

$$\gamma(x, y) = \Phi_y \bar{h}^3 \rightarrow \gamma(x, y) = \left[ 1 - \left( \frac{\Omega}{\bar{h}} \right)^2 \right]^2 \bar{h}^3 \quad (81)$$

que pode ser desenvolvido na forma:

$$\gamma(x, y) = \left[ 1 - 2 \left( \frac{\Omega}{\bar{h}} \right)^2 + \left( \frac{\Omega}{\bar{h}} \right)^4 \right] \bar{h}^3 \quad (82)$$

ou, alternativamente:

$$\gamma(x, y) = \bar{h}^3 - 2\bar{h}\Omega^2 + \frac{\Omega^4}{\bar{h}} \quad (83)$$



De modo semelhante, o termo  $\delta(x, y)$  fica escrito:

$$\delta(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (\Phi_y \bar{h}^3) \rightarrow \delta(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \left[ 1 - \left( \frac{\Omega}{\bar{h}} \right)^2 \right]^2 \bar{h}^3 \right) \quad (84)$$

ou, ainda:

$$\delta(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{h}^3 - 2\bar{h}\Omega^2 + \frac{\Omega^4}{\bar{h}} \right) \quad (85)$$

levando a:

$$\delta(x, y) = 3\bar{h}^2 \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} - 2\Omega^2 \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} - \frac{\Omega^4}{\bar{h}^2} \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} \quad (86)$$

a qual pode ser mais uma vez reescrita, na forma:

$$\delta(x, y) = \left( 3\bar{h}^2 - 2\Omega^2 - \frac{\Omega^4}{\bar{h}^2} \right) \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} \quad (87)$$

onde:

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial y} = \frac{e_b(t) - e_t(t)}{L} \cos \theta \quad (88)$$

Finalmente, escreve-se o termo independente da pressão hidrodinâmica  $\varepsilon(x, y)$ , na forma:

$$\varepsilon(x, y) = 6\mu U \left( \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} + \Omega \frac{\partial \Phi_s}{\partial y} \right) + 12\mu \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} \quad (89)$$

Da equação (67), tem-se:

$$\frac{\partial \Phi_s}{\partial y} = \frac{\Omega}{\bar{h}^2} \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} \quad (90)$$

Por outro lado, da equação (69):

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = \cos \theta \left[ \dot{e}_t \left( 1 - \frac{y}{L} \right) - \dot{e}_b(t) \frac{y}{L} \right] \quad (91)$$

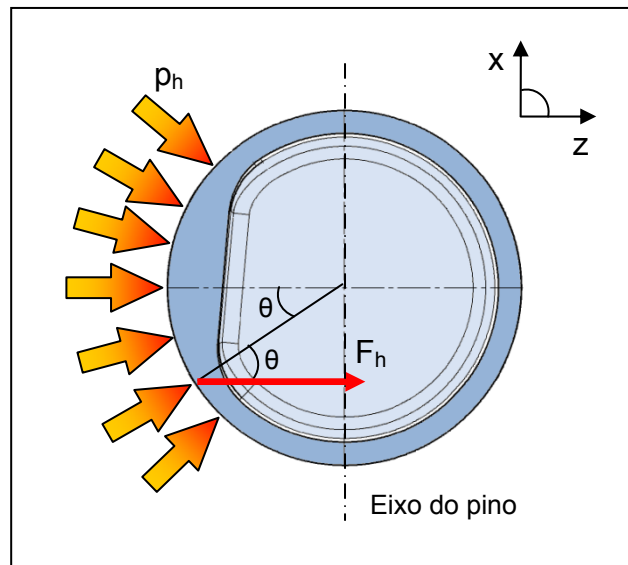
A equação (89) é, então, reescrita, na forma:

$$\varepsilon(x, y) = 6\mu U \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} \left[ 1 + \left( \frac{\Omega}{\bar{h}} \right)^2 \right] + 12\mu \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} \quad (92)$$

#### 7.2.4 Força normal à saia do pistão – Pressão hidrodinâmica

O desenvolvimento das equações que definem a pressão hidrodinâmica ao longo da saia do pistão para cada instante do ciclo do motor, torna possível determinar as principais forças e momentos excitantes. Definem-se aqui a força normal e o seu respectivo momento, provenientes da pressão hidrodinâmica.

O esquema apresentado na Figura 48 indica a distribuição das forças normais que atuam na saia do pistão. Pretende-se, portanto, determinar a parcela da pressão hidrodinâmica que atua perpendicularmente ao pino do pistão.



**Figura 48. Esquema da distribuição das forças normais a saia do pistão**

Fonte: Elaborado pelo autor

A pressão hidrodinâmica em cada região da saia deve ser multiplicada pelo cosseno do ângulo  $\theta$ , de modo a definir sua parcela na direção perpendicular ao eixo do pino. Em seguida deve-se integrar este valor na área da saia do pistão de modo que:

$$F_h = R \iint_A p_h(\theta, y) \cos \theta \, d\theta dy \quad (93)$$

Semelhantemente, o momento, resultante da pressão hidrodinâmica, em relação ao eixo do pino do pistão é dado por:

$$M_h = R \iint_A p_h(\theta, y)(a - y) \cos \theta \, d\theta dy \quad (94)$$

#### 7.2.5 Força de atrito Hidrodinâmico:

Em seguida, faz-se necessário representar a força de atrito hidrodinâmico aplicado à saia do pistão. A tensão de cisalhamento em um escoamento, sem escorregamento, entre duas superfícies perfeitamente planas é obtida de:

$$\tau = -\mu \frac{\partial U}{\partial h} \quad (95)$$

No entanto, em superfícies rugosas, assim como é a saia do pistão, deve-se levar em consideração fatores relativos a tais imperfeições. De acordo com Zhu (1991) apud Zhu (1992), a tensão de cisalhamento média existente na saia do pistão pode ser expressa por:

$$\tau = -\frac{\mu U}{\bar{h}} (\Phi_f + \Phi_{fs}) + \Phi_{fp} \frac{\bar{h}}{2} \frac{\partial p_h}{\partial y} \quad (96)$$

onde:

$\Phi_f, \Phi_{fs}, \Phi_{fp}$  = Fatores de tensão de cisalhamento do fluido.

Consistentemente ao realizado na determinação dos fatores de fluxo da equação que determina a pressão hidrodinâmica, considera-se aqui, somente o efeito das ondulações ( $\Omega$ ) da superfície da saia do pistão. Assim:

$$\Phi_f = \frac{\bar{h}}{2\Omega} \ln \left( \frac{\bar{h} + \Omega}{\bar{h} - \Omega} \right) \quad (97)$$

e:

$$\Phi_{fs} = \frac{3}{2} \left[ \frac{\bar{h}}{\Omega} \ln \left( \frac{\bar{h} + \Omega}{\bar{h} - \Omega} \right) - 2 \right] \quad (98)$$

e:

$$\Phi_{fp} = 1 - \left( \frac{\Omega}{\bar{h}} \right)^2 \quad (99)$$

A força total de atrito hidrodinâmico pode, então, ser calculada integrando-se a tensão de cisalhamento local ao longo da área da saia do pistão, conforme:

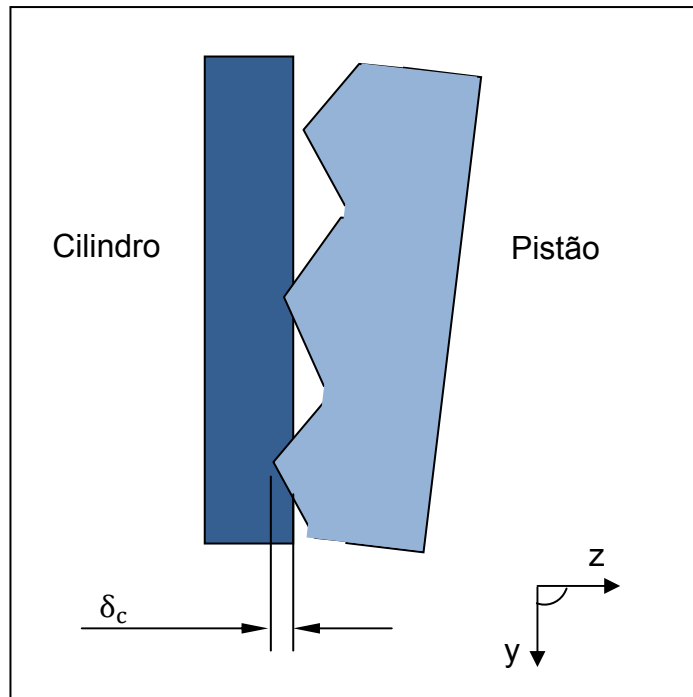
$$F_{ah} = R \iint_A \tau(\theta, y) d\theta dy \quad (100)$$

De modo semelhante, o momento das forças de atrito em torno do pino do pistão é determinado por:

$$M_{ah} = R \iint_A \tau(\theta, y) (R \cos \theta - C_p) d\theta dy \quad (101)$$

#### 7.2.6 Pressão de contato

Cabe aqui definir a pressão de contato existente entre a saia do pistão e a parede do cilindro devido às ondulações verificadas nas saias dos pistões em condições de extremo carregamento, onde o filme hidrodinâmico não é capaz de conter o pistão. O ponto de partida para o cálculo desta pressão é a definição da região da saia do pistão onde são evidenciados contatos de metal com metal. A Figura 49 abaixo apresenta esquematicamente como esta região é determinada.



**Figura 49. Contato metal com metal verificado nos picos da ondulação com deformação local**

Fonte: Elaborado pelo autor

Nos pontos em que a espessura do filme se torna menor do que a magnitude das ondulações da saia do pistão, são verificados contatos com pequenas deformações locais entre as superfícies. Define-se a deformação local como:

$$\delta_c = \begin{cases} \Omega - \bar{h}, & \text{se } \bar{h} < \Omega \\ 0, & \text{se } \bar{h} \geq \Omega \end{cases} \quad (102)$$

onde:

$\delta_c$  = Deformação local da onda [m];

$\Omega$  = Ondulação da saia do pistão [m];

$\bar{h}$  = Espessura média do filme de óleo [m].

A pressão de contato existente em cada pico da ondulação da saia do pistão será, portanto, função da deformação local. Conforme apresentado anteriormente, a distribuição da pressão de contato por unidade de comprimento para cada um dos picos é dada por:

$$\bar{p}_w(s) = \frac{E'}{2\pi \tan(\bar{\alpha})} \ln \left[ \frac{q + (q^2 - x^2)^{0.5}}{q - (q^2 - x^2)^{0.5}} \right] \quad (103)$$

onde:

$\bar{p}_w$  = Pressão de contato por unidade de comprimento [N/m<sup>3</sup>];

$E'$  = Módulo de elasticidade [Pa];

$\bar{\alpha}$  = Ângulo na extremidade das ondulações [°];

$q$  = Largura da zona de contato entre cilindro e pistão [m].

De acordo com Zhu (1992), visto que o ângulo  $\bar{\alpha}$  é próximo a 90°, a deformação no centro da zona de contato existente em uma onda pode ser calculada como função da deformação através da expressão abaixo.

$$\delta = -\frac{2}{\pi E'} \int_{-q}^q \bar{p}_w(s) \ln|s| ds \quad (104)$$

Levando em consideração a equação (103) em conjunto com a equação (104) é possível obter:

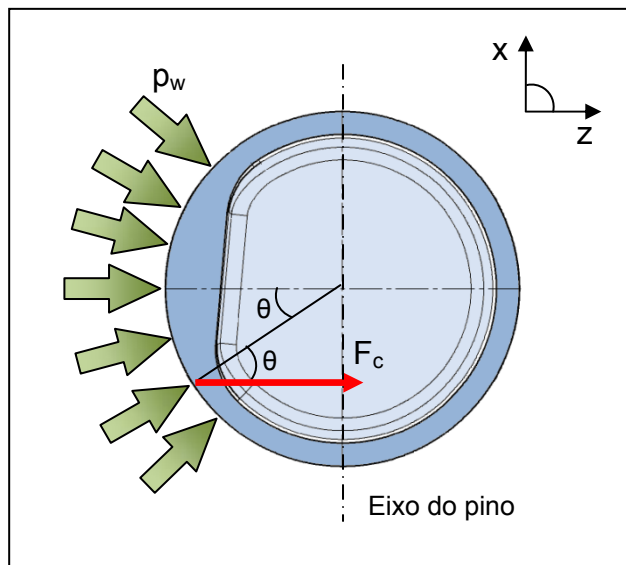
$$\delta = -\frac{2}{\pi^2 \tan(\bar{\alpha})} \int_{-q}^q \ln|s| \ln \left[ \frac{q + (q^2 - s^2)^{0.5}}{q - (q^2 - s^2)^{0.5}} \right] ds \quad (105)$$

O valor da deformação é um valor de entrada deste problema, pois a posição do pistão é conhecida no instante anterior ao cálculo (ver equação (102)), bem como o ângulo do pico da onda e as propriedades dos materiais são conhecidos. Desta forma, ao adimensionalizar e resolver numericamente a equação (105), é possível determinar o valor da pressão média por unidade de comprimento no de contato existente em um pico da ondulação.

#### 7.2.7 Força normal à saia do pistão - Força de contato

Calculado o valor da pressão de contato por unidade de comprimento em cada uma das ondas existentes na saia do pistão, o próximo passo é a determinação da respectiva força normal, bem como de seu momento.

A Figura 50 apresenta o esquema da distribuição das forças. Deve-se, assim, calcular a força existente em cada uma das regiões da saia do pistão, e integrá-las de modo a obter a resultante na direção radial ao cilindro.



**Figura 50. Esquema da distribuição das forças normais a saia do pistão**  
Fonte: Elaborado pelo autor

A força de contato na direção radial do cilindro pode ser escrita na forma integral:

$$F_c = R \iint_A p_w(\theta, y) \cos(\theta) d\theta dy \quad (106)$$

onde:

$F_c$  = Força de contato na saia do pistão [N];

$R$  = Raio do pistão [m];

$p_w$  = Pressão de contato [MPa].

O momento das forças de contato em relação ao pino, por sua vez, é escrito:

$$M_c = R \iint_A p_w(\theta, y)(a - y) \cos(\theta) d\theta dy \quad (107)$$

onde:

$M_c$  = Momento devido ao contato na saia do pistão [N];

$a$  = Distância na direção  $y$  entre a parte superior da saia e o ponto A [m].

#### 7.2.8 Atrito de contato

Finalmente avaliam-se as forças de atrito impostas ao pistão devido ao possível contato metal com metal nos instantes de maior carregamento. Admite-se válido o clássico modelo de atrito Coulombiano.

A força total de atrito de contato é determinada pela integração das pressões de contato locais multiplicada pelo coeficiente de atrito:

$$F_{ac} = -R \frac{|U|}{U} \iint_A p_w(\theta, y) \mu_c d\theta dy \quad (108)$$

onde:

$F_{ac}$  = Força de atrito de contato [Nm];

$\mu_c$  = Atrito de contato.

De forma análoga, determina-se também o momento relativo à força de atrito, em relação ao pino do pistão. Desta forma:

$$M_{ac} = R \frac{|U|}{U} \iint_A p_w(\theta, y) \mu_c (R \cos(\theta) - C_p) d\theta dy \quad (109)$$

onde:

$M_{ac}$  = Momento devido ao atrito de contato [Nm].



## 8 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

A implementação do modelo matemático apresentado pode ser dividida em duas etapas. Na primeira etapa são desenvolvidas rotinas de cálculo, através de métodos numéricos, para a determinação das forças excitantes, bem como dos valores iniciais do problema. Já a segunda consiste na construção da parte dinâmica do modelo, de modo a solucionar o sistema de equações diferenciais de segunda ordem ao longo do período de análise. Todo o desenvolvimento foi realizado no *software* Matlab®.

### 8.1 Rotinas de Cálculo

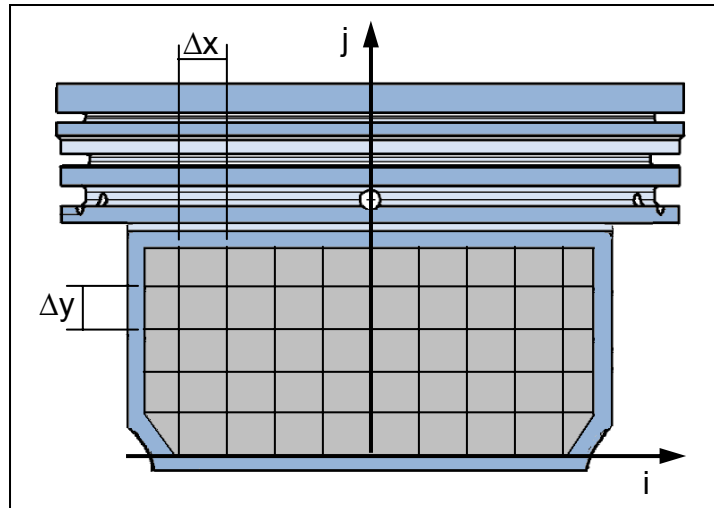
A determinação das forças excitantes do sistema consiste de três rotinas principais de cálculo. Pretende-se aqui apresentar as principais etapas dos seus respectivos desenvolvimentos, bem como suas validações. Todas as rotinas desenvolvidas na linguagem de programação utilizada são apresentadas no Apêndice F.

#### 8.1.1 Pressão Hidrodinâmica

A principal e mais complexa rotina de cálculo numérico do modelo desenvolvido trata da determinação da pressão hidrodinâmica aplicada à saia do pistão. Conforme apresentado anteriormente, a expressão (63) para o cálculo desta pressão é uma equação diferencial parcial (EDP) de segunda ordem, cuja solução é obtida apenas por método numérico.

As EDPs são classificadas em hiperbólicas, parabólicas e elípticas. Para o caso da equação (63) tem-se uma EDP do tipo elíptica. De acordo com Santana (1998), tais equações têm por característica modelar fenômenos físicos de equilíbrio, os quais permanecem em um estado estacionário, como, por exemplo, carregamentos aplicados em uma placa. Assim sendo, caracterizam-se por problemas de contorno.

O método utilizado na resolução da equação (63) é o de diferenças finitas. Tal método consiste na substituição das derivadas parciais, presentes na EDP, por aproximações, as quais são calculadas em uma malha finita de pontos dentro da região de interesse. A Figura 51 apresenta a malha e os valores de contorno utilizados na resolução do problema.



**Figura 51. Malha de pontos do domínio utilizada na determinação da pressão hidrodinâmica na saída do pistão**

Fonte: Elaborado pelo autor

A partir da definição da malha, bem como de seus espaçamentos, torna-se possível determinar as aproximações das derivadas parciais da equação (63) de modo a linearizá-la. De acordo com Press et. al. (1992), para este problema, tais aproximações podem ser escritas conforme segue:

$$\frac{\partial^2 p_h}{\partial x^2} = \frac{p_{j,i+1} - 2p_{j,i} + p_{j,i-1}}{\Delta x^2} \quad (110)$$

onde:

$p$  = Pressão hidrodinâmica local [Pa];

$\Delta x$  = Espaçamento da malha na direção  $x$  [m];

$i$  = Coordenada da malha no eixo  $x$ ;

$j$  = Coordenada da malha no eixo  $y$ ;

tal que:

$$i = 0, 1, 2, \dots, I \quad (111)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, J \quad (112)$$

e:

$$\frac{\partial^2 p_h}{\partial y^2} = \frac{p_{j+1,i} - 2p_{j,i} + p_{j-1,i}}{\Delta y^2} \quad (113)$$

onde:

$\Delta y$  = Espaçamento da malha na direção y [mm].

Ainda:

$$\frac{\partial p_h}{\partial x} = \frac{p_{j,i+1} - p_{j,i-1}}{2\Delta x} \quad (114)$$

e:

$$\frac{\partial p_h}{\partial y} = \frac{p_{j+1,i} - p_{j-1,i}}{2\Delta y} \quad (115)$$

A equação diferencial parcial que rege a pressão hidrodinâmica (63) pode ser reescrita na forma discreta como:

$$\begin{aligned} \alpha(x, y) \left( \frac{p_{j,i+1} - 2p_{j,i} + p_{j,i-1}}{\Delta x^2} \right) + \beta(x, y) \left( \frac{p_{j,i+1} - p_{j,i-1}}{2\Delta x} \right) \\ + \gamma(x, y) \left( \frac{p_{j+1,i} - 2p_{j,i} + p_{j-1,i}}{\Delta y^2} \right) + \delta(x, y) \left( \frac{p_{j+1,i} - p_{j-1,i}}{2\Delta y} \right) \\ = \varepsilon(x, y) \end{aligned} \quad (116)$$

Os termos de pressão hidrodinâmica são, então, colocados em evidência:

$$\begin{aligned} p_{j,i+1} \left( \frac{\alpha(x, y)}{\Delta x^2} + \frac{\beta(x, y)}{2\Delta x} \right) + p_{j,i-1} \left( \frac{\alpha(x, y)}{\Delta x^2} - \frac{\beta(x, y)}{2\Delta x} \right) \\ + p_{j+1,i} \left( \frac{\gamma(x, y)}{\Delta y^2} + \frac{\delta(x, y)}{2\Delta y} \right) + p_{j-1,i} \left( \frac{\gamma(x, y)}{\Delta y^2} - \frac{\delta(x, y)}{2\Delta y} \right) \\ + p_{j,i} \left( -\frac{2\gamma(x, y)}{\Delta y^2} - \frac{2\alpha(x, y)}{\Delta x^2} \right) - \varepsilon(x, y) = 0 \end{aligned} \quad (117)$$

A partir da equação (117), é possível determinar a pressão hidrodinâmica local ( $p_{j,i}$ ) de cada ponto da malha em função das pressões hidrodinâmicas dos

pontos ao seu redor. Tem-se, portanto, um sistema de equações lineares, o qual pode ser escrito na forma de uma equação matricial:

$$\mathbf{AP} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{bp} \quad (118)$$

onde:

$\mathbf{AP}$  = Matriz dos termos dependentes de  $p_{j,i}$ ;

$\mathbf{p}$  = Vetor das pressões  $p_{j,i}$  que definem a resolução da malha;

$\mathbf{bp}$  = Vetor dos termos independentes de  $p_{j,i}$ .

Para a resolução do sistema definido por (118) utiliza-se o método de sobre-relaxação sucessiva (SOR<sup>7</sup>). Trata-se de um método de iteração que, a partir de um valor inicial para o vetor  $\mathbf{p}^{(0)}$ , converge sucessivamente para a solução numérica  $\mathbf{p}^{(r)}$ .

No método SOR faz-se uso direto da matriz esparsa  $\mathbf{AP}$  de modo a dividi-la e torná-la facilmente inversível. Desta forma:

$$\mathbf{AP} = \mathbf{LP} + \mathbf{DP} + \mathbf{UP} \quad (119)$$

onde:

$\mathbf{LP}$  = Parte inferior da matriz  $\mathbf{AP}$ ;

$\mathbf{DP}$  = Diagonal principal da matriz  $\mathbf{AP}$ ;

$\mathbf{UP}$  = Parte superior da matriz  $\mathbf{AP}$ .

A equação (118) é, então reescrita, permitindo as iterações, de modo que:

$$\mathbf{DP} \times \mathbf{p}^{(r)} = -(\mathbf{LP} + \mathbf{UP})\mathbf{p}^{(r-1)} + \mathbf{bp} \quad (120)$$

Com o objetivo de tornar a convergência da solução mais rápida, o método SOR determina um parâmetro ótimo de relaxação ( $\omega'$ ) o qual é aplicado à equação (120). A solução do sistema é obtida quando a diferença entre  $\mathbf{p}^{(r)}$  e  $\mathbf{p}^{(r-1)}$  é menor que a tolerância estabelecida.

O desenvolvimento completo da rotina para o cálculo da equação (117) e definição do campo de pressão hidrodinâmica é apresentado no Apêndice A. A

---

<sup>7</sup> SOR – Successive OverRelaxation

rotina utilizada para aplicar o método SOR é baseada no algoritmo desenvolvido por Burden (2000). A validação desta rotina específica foi realizada através da solução da Equação de Poisson e pode também ser encontrada no Apêndice A.

### 8.1.2 Força Hidrodinâmica e Atrito Hidrodinâmico

Para a determinação da força hidrodinâmica e da força de atrito hidrodinâmico, são desenvolvidas duas pequenas rotinas, semelhantes entre si. O problema aqui consiste, basicamente, em desenvolver um método numérico para integrar e derivar a curva de pressão hidrodinâmica definida pelo vetor  $P^{(r)}$ .

No caso da força hidrodinâmica, deve-se integrar, ao longo da área da saia do pistão, o produto da pressão hidrodinâmica e o cosseno de  $\theta$ . De acordo com Press et al. (1992), para casos onde a condição de contorno é conhecida e simples e a função integrada é suave e contínua, é possível utilizar métodos unidimensionais de integração repetidamente.

Desta forma, para a integração numérica da equação (93), utiliza-se a fórmula de Newton-Cote. De modo a obter uma única equação para toda a extensão analisada, aplica-se uma fórmula estendida, cujo resultado é a soma das  $n$  fórmulas de Newton-Cote. A fórmula utilizada possui grau quatro de resolução de modo a permitir precisão compatível com a equação (93) cujo grau é maior que dois. Desta forma:

$$\int_0^j f(\theta, y) dy = \Delta y \left[ \frac{3}{8} f_1 + \frac{7}{6} f_2 + \frac{23}{24} f_3 + f_4 + \dots + f_{N-3} + \frac{23}{24} f_{N-2} + \frac{7}{6} f_{N-1} + \frac{3}{8} f_N \right] \quad (121)$$

onde:

$$f(\theta, y) = p_h(\theta, y) \cos \theta \quad (122)$$

e ainda:

$$\int_0^i g(\theta, y) d\theta = \Delta y \left[ \frac{3}{8} g_1 + \frac{7}{6} g_2 + \frac{23}{24} g_3 + g_4 + \dots + g_{N-3} + \frac{23}{24} g_{N-2} + \frac{7}{6} g_{N-1} + \frac{3}{8} g_N \right] \quad (123)$$

onde:

$$g(\theta, y) = \int_0^j f(\theta, y) dy \quad (124)$$

Portando:

$$F_h = R \int_0^i g(\theta, y) d\theta \quad (125)$$

Analogamente, determina-se o momento proveniente da pressão hidrodinâmica aplicada à saia do pistão.

Já para a rotina de determinação da tensão de cisalhamento que atua na saia do pistão, faz-se necessário o cálculo numérico da derivada parcial da pressão hidrodinâmica em relação à  $y$ . Conforme mencionado a curva de pressão hidrodinâmica possui grau maior que dois. Utiliza-se, assim, a fórmula da regra de aproximação de cinco pontos cuja ordem de precisão é de grau quatro. A derivada parcial pode, então, ser escrita como:

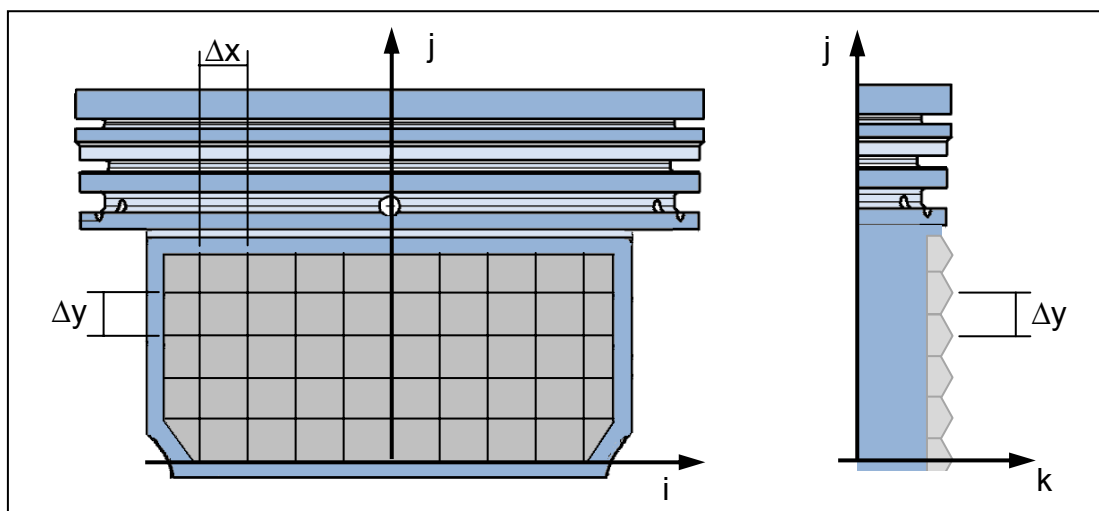
$$\frac{\partial p_h(y_0)}{\partial y} = \frac{-3p_h(y_4) + 16p_h(y_3) - 36p_h(y_2) + 48p_h(y_1) - 25p_h(y_0)}{12\Delta y} \quad (126)$$

A partir da determinação da equação (126), o desenvolvimento da rotina para o cálculo da tensão de cisalhamento torna-se trivial. De forma semelhante ao realizado para a força hidrodinâmica, integra-se numericamente a tensão de cisalhamento na área de trabalho pela fórmula de Newton-Cote, obtendo-se a força e o momento devido ao atrito hidrodinâmico.

A integração numérica das equações (93) e (94) tende a conferir pequenas incertezas aos resultados obtidos, devido à característica das curvas de pressão hidrodinâmica. No entanto, os resultados obtidos no cálculo numérico das equações (100) e (101) podem não representar com precisão os valores reais, uma vez que métodos numéricos de derivação não convergem tão bem como métodos de integração. Por este motivo, é apresentado no Apêndice B um estudo da convergência dos resultados da equação (100), para diversos espaçamentos, de modo a determinar uma malha adequada para o estudo.

### 8.1.3 Atrito de Contato

Assim como realizado para o cálculo da pressão hidrodinâmica, a saia do pistão é mais uma vez discretizada em uma malha de pontos. No entanto, para este caso específico o espaçamento na direção vertical deve corresponder à distância existente entre cada um dos picos da ondulação da superfície do pistão. A Figura 52 ilustra a malha de pontos utilizadas.



**Figura 52. Malha de pontos do domínio utilizada na determinação da pressão de contato na saia do pistão**

Fonte: Elaborado pelo autor

Desta forma, deve-se determinar as forças de contato existentes em cada um dos picos da ondulação nos quais são evidenciados o contato metal com metal. Estas, por sua vez, são somadas de modo a obter, por fim, a força total aplicada à saia do pistão.

O primeiro passo para determinação dos esforços de contato é o cálculo da força de contato por unidade de comprimento existente em cada ponto da malha. Esta pode ser obtida através da resolução numérica da equação (105) (apresentada em detalhe no apêndice C), de modo que:

$$P_w = \frac{\delta_c E'}{1.077} \quad (127)$$

onde:

$P_w$  = Força de contato por unidade de comprimento [N/m].

Finalizada esta etapa de cálculo, cada pico da ondulação deve ter suas forças de contato integradas ao longo de seu comprimento, obtendo-se assim as forças de contato em cada um deles. De forma semelhante à realizada no cálculo das forças hidrodinâmicas, utiliza-se aqui a fórmula estendida de Newton-Cote.

$$\int_0^j f(\theta, y) dy = \Delta y \left[ \frac{3}{8} f_1 + \frac{7}{6} f_2 + \frac{23}{24} f_3 + f_4 + \dots + f_{N-3} + \frac{23}{24} f_{N-2} + \frac{7}{6} f_{N-1} + \frac{3}{8} f_N \right] \quad (128)$$

onde:

$$f(\theta, y) = P_w(\theta, y) \quad (129)$$

Finalmente, o valor da força de contato em cada um dos picos é somado obtendo-se a força de contato total aplicada à saia do pistão. Este procedimento de cálculo é repetido de forma semelhante de modo a obter os valores da força de atrito de contato, bem como os momentos referentes às forças normais e de atrito.

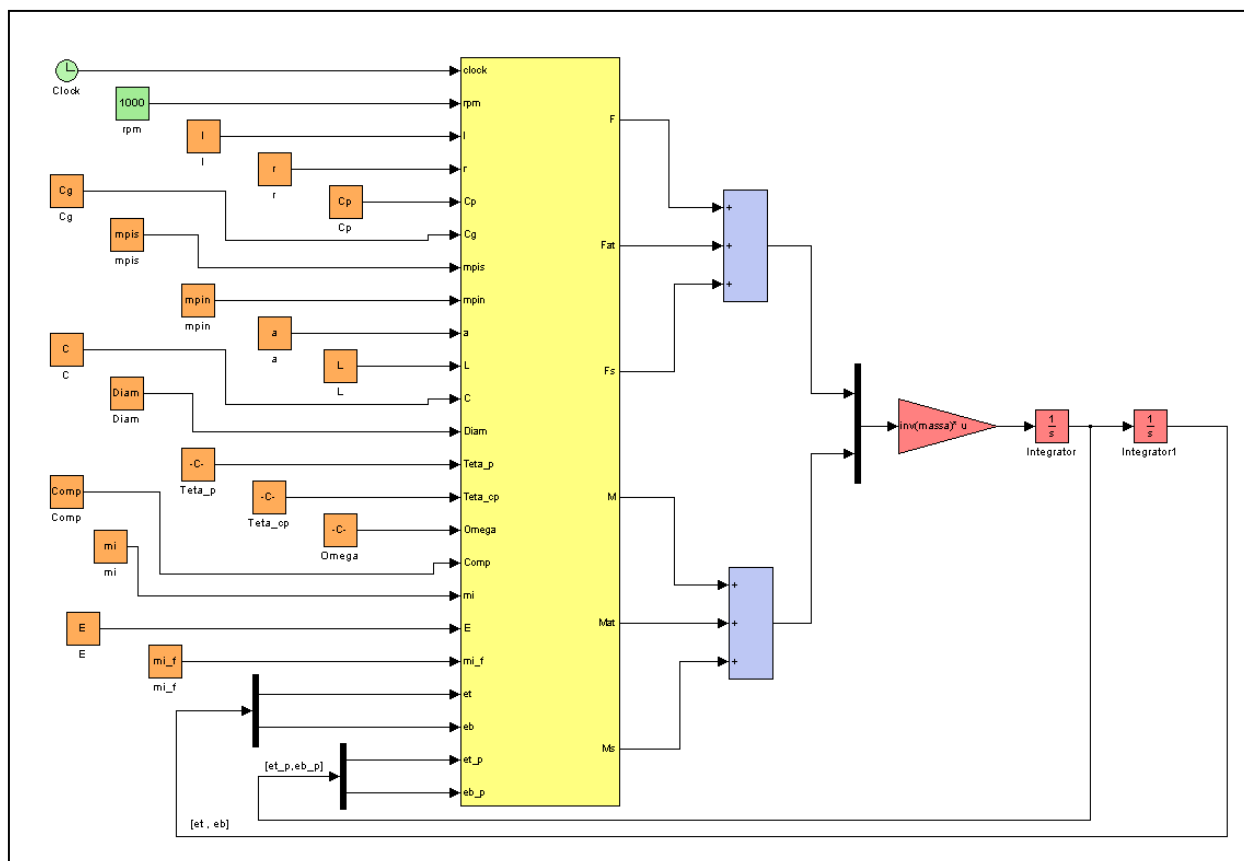
## 8.2 Sistema de equações diferenciais

A segunda etapa de implementação consiste na construção de uma rotina capaz de solucionar o sistema de equações diferenciais, que rege o fenômeno em estudo, ao longo do tempo e com base nas subrotinas apresentadas anteriormente, de modo a obter o comportamento dinâmico do sistema. Esta rotina determina, portanto, as coordenadas ( $e_b$  e  $e_t$ ) para cada instante da simulação.

Para facilitar a compreensão do fluxo de informações e cálculos realizados na resolução do sistema de equações, toda rotina é aqui desenvolvida em diagrama de blocos. Assim sendo, a Figura 53 apresenta o diagrama geral do modelo numérico utilizado, com suas respectivas partes divididas por cores.

Os blocos pequenos na cor laranja representam as características dimensionais, bem como propriedades físicas como massa e viscosidade, do conjunto pistão, biela e manivela, necessárias para os cálculos. Tais valores são definidos através da rotina “Dados\_entrada”, apresentada no apêndice F, e aplicados conforme indicado no diagrama. Já os blocos verdes, no canto superior esquerdo da figura são dados de entrada relativos ao tempo; ou seja, a rotação do motor na condição analisada, bem como o próprio instante de simulação.



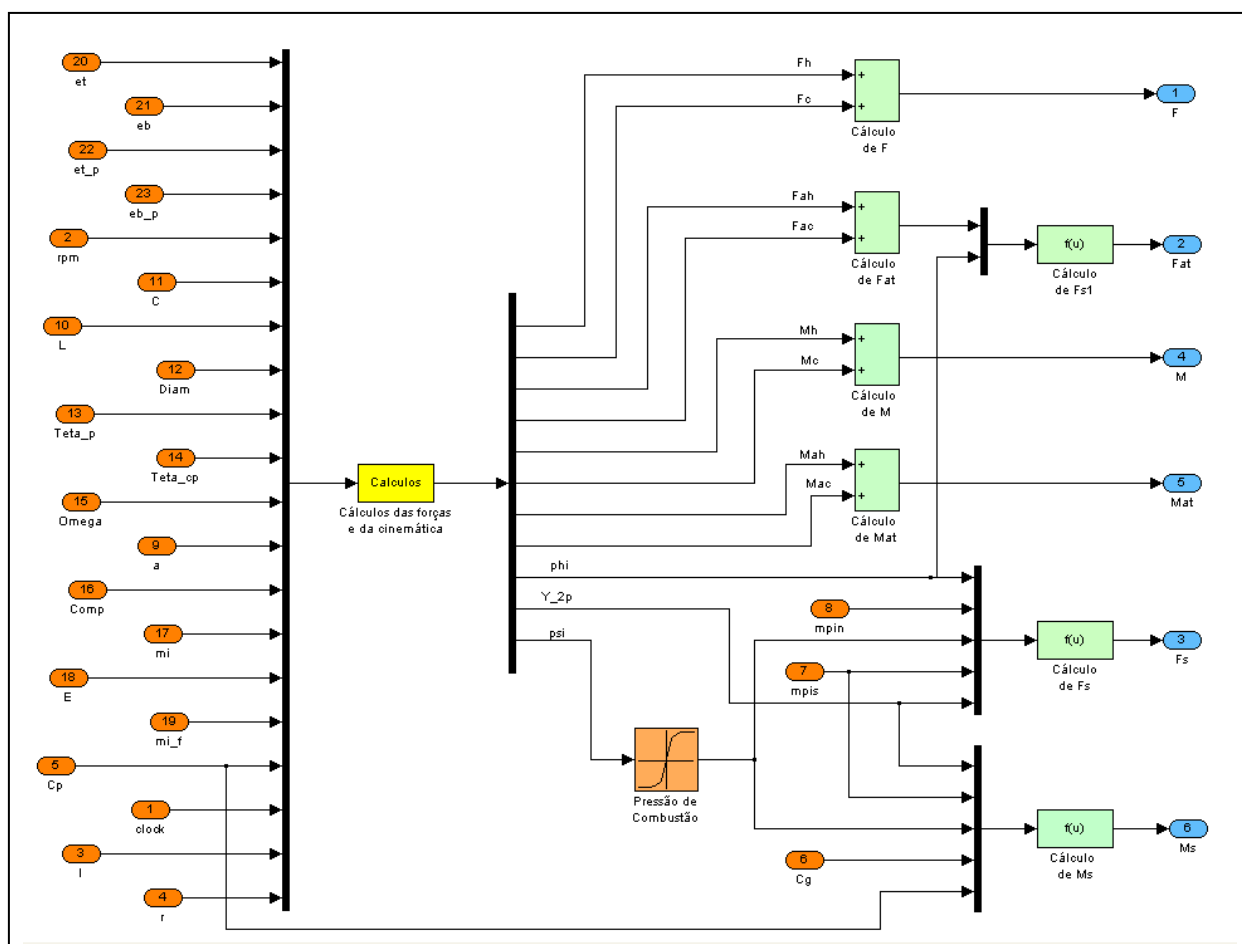


**Figura 53. Diagrama de blocos do modelo numérico**

Fonte: Elaborado pelo autor

Ainda na Figura 53, o grande bloco retangular amarelo ao centro corresponde ao subsistema com as rotinas para os cálculos da posição vertical do pistão e das forças excitantes do sistema. É neste subsistema onde a maioria dos cálculos e rotinas são realizados. O seu interior pode ser visto na Figura 54. Os pequenos blocos ovais correspondem às entradas e às saídas do subsistema, sendo os na cor laranja as entradas e os azuis as saídas.

A caixa amarela central é a função que realiza a principal rotina do sistema. É nela onde são aplicadas todas as rotinas de cálculo numérico apresentadas anteriormente, para determinação dos esforços provenientes do filme hidrodinâmico, bem como do contato entre o pistão e o cilindro. É, então, calculada a espessura do filme de óleo, bem como a pressão hidrodinâmica. Estes valores são utilizados para o cálculo das forças e momentos hidrodinâmicos. Em seguida, se existente, a região de contato metal com metal é determinada e as respectivas forças e momentos calculados. Todos estes cálculos são realizados para a saia do lado de pressão e para a saia do lado de contra-pressão e então somados.



**Figura 54. Diagrama de blocos do subsistema para o cálculo das forças excitantes e da cinemática do pistão**

Fonte: Elaborado pelo autor.

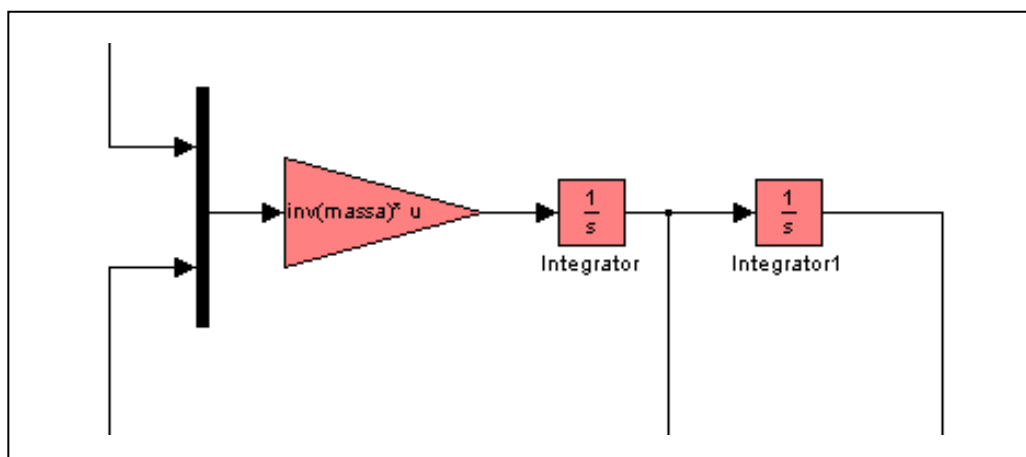
Nela é também calculada a dinâmica primária do conjunto na direção do cilindro do motor. Assim sendo, são calculadas a velocidade e a aceleração do pistão na direção  $y$  através das equações (35) e (36). De modo a determinar todo o posicionamento do conjunto, são também calculados os ângulos da árvore de manivelas e da posição da biela.

O bloco laranja, na parte inferior do diagrama, determina a pressão na câmara de combustão de acordo com o ângulo de entrada da árvore de manivelas calculado pela função anterior. Tendo em mente que a pressão de combustão é um dado de entrada do problema, de determinação experimental, esta rotina somente seleciona o valor de pressão correspondente a cada posição da árvore de manivelas.

Finalmente, os blocos em cor verde somam os valores encontrados nas rotinas de modo a serem obtidos os parâmetros definidos na equação (60). Assim, as forças e momentos hidrodinâmicos são somadas às forças e momentos de contato, determinando-se os valores de  $F$ ,  $F_{at}$ ,  $M$  e  $M_{at}$ . Os dois últimos blocos verdes calculam os resultados das equações (51) e (59), determinando  $F_s$  e  $M_s$ .

A rotina definida pelo diagrama de blocos é finalizada com o cálculo das coordenadas generalizadas do sistema de equações diferenciais. Os blocos azuis da Figura 53 somam os valores determinados no subsistema, obtendo as forças e os momentos totais do sistema, os quais determinam a matriz das forças excitantes presente na equação (60).

A Figura 55 apresenta o detalhe do diagrama de blocos principal onde os três blocos vermelhos determinam os valores de aceleração, velocidade e posição do pistão na direção perpendicular ao eixo do cilindro.



**Figura 55. Detalhe do cálculo das coordenadas generalizadas no diagrama de blocos principal**

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nesta etapa a matriz composta pelas forças do sistema é multiplicada pela inversa da matriz de massa, também determinada na rotina “Dados\_entrada”, permitindo calcular as acelerações ( $e_b$  e  $e_t$ ) do pistão. Em seguida, estes valores são integrados no tempo, determinando-se os valores de velocidade. Finalmente, após mais uma etapa de integração obtêm-se a posição lateral do pistão no cilindro. Os valores aqui obtidos de velocidade e posição alimentam novamente as rotinas iniciais para o cálculo das forças excitantes, fechando o ciclo do diagrama.

O procedimento numérico descrito pode ser iniciado em qualquer posição do pistão, pois a solução final será sempre periódica e função da trajetória do pistão. No entanto, para facilitar as análises, o cálculo numérico sempre iniciará com valores iguais a zero. Tem-se:

$$e_b = e_t = \dot{e}_b = \dot{e}_t = \ddot{e}_b = \ddot{e}_t = Y = 0 \quad (130)$$

De acordo com os testes realizados por Zhu (1992), para intervalo de tempo equivalente a dois graus, são necessários em torno de seis ciclos do motor para se obter uma solução cíclica. Como, para motores de quatro tempos, um ciclo corresponde a duas voltas do motor, o tempo de simulação deve ser equivalente a 4320 graus. Algumas considerações com relação à características do modelo numérico desenvolvido pode ser encontrado no Apêndice D.

## 9 SIMULAÇÃO E ANÁLISE

### 9.1 Dados de entrada

O objetivo desta seção é apresentar os dados de entrada necessários e utilizados neste trabalho para realizar a simulação da dinâmica do pistão, bem como indicar os parâmetros que serão utilizados na análise paramétrica do conjunto e seus valores.

#### 9.1.1 Dados iniciais

Para facilitar a organização dos parâmetros aqui apresentados, estes são aqui subdivididos por tipo e componente do conjunto.

##### 9.1.1.1 Pistão

Raio do pistão ( $R$ )	38,24 mm
Massa do pistão ( $m_{pis}$ )	0,236 kg
Momento de inércia do pistão ( $I_{pis}$ )	136,1 kgmm <sup>2</sup>
<i>Off-set</i> do pino do pistão ( $C_p$ )	0,5 mm
Altura da saia do pistão ( $L$ )	30,3 mm
Limite da largura da saia de pressão ( $\theta_1$ )	35,6 °
Limite da largura da saia de contra-pressão ( $\theta_2$ )	30,4 °
Altura da onda da saia do pistão ( $\Omega$ )	4 $\mu$ m
Distância entre ondas ( $L_o$ )	0,25 mm
Dist. do topo da saia ao centro do pino ( $a$ )	8,4 mm
Dist. na direção y do topo da saia ao C.G. do pistão ( $b$ )	0,3 mm
Dist. na direção z do centro do pino ao C.G. do pistão ( $C_g$ )	0,325 mm
Módulo de elasticidade ( $E_1$ )	68,6 GPa
Coeficiente de Poisson ( $\nu_1$ )	0,34

#### 9.1.1.2 Bloco do motor

Diâmetro dos cilindros (Diam)	76,51 mm
Módulo de elasticidade ( $E_2$ )	98,0 GPa
Coeficiente de Poisson ( $\nu_2$ )	0,25

#### 9.1.1.3 Interação – bloco do motor e pistão

Coeficiente de atrito ( $\mu_c$ )	0,150
Módulo de elasticidade efetivo ( $E'$ )	44,52 GPa

- O módulo de elasticidade efetivo é obtido através da expressão abaixo:

$$E' = \left[ \frac{(1 - \nu_1^2)}{E_1} + \frac{(1 - \nu_2^2)}{E_2} \right]^{-1} \quad (131)$$

Folga radial (C)	0,015 mm
------------------	----------

- A folga radial é calculada através da expressão abaixo:

$$C = \frac{\text{Diam}}{2} - R \quad (132)$$

#### 9.1.1.4 Pino do pistão

Massa do pino ( $m_{\text{pin}}$ )	0,052 kg
------------------------------------	----------

#### 9.1.1.5 Sistema biela-manivela

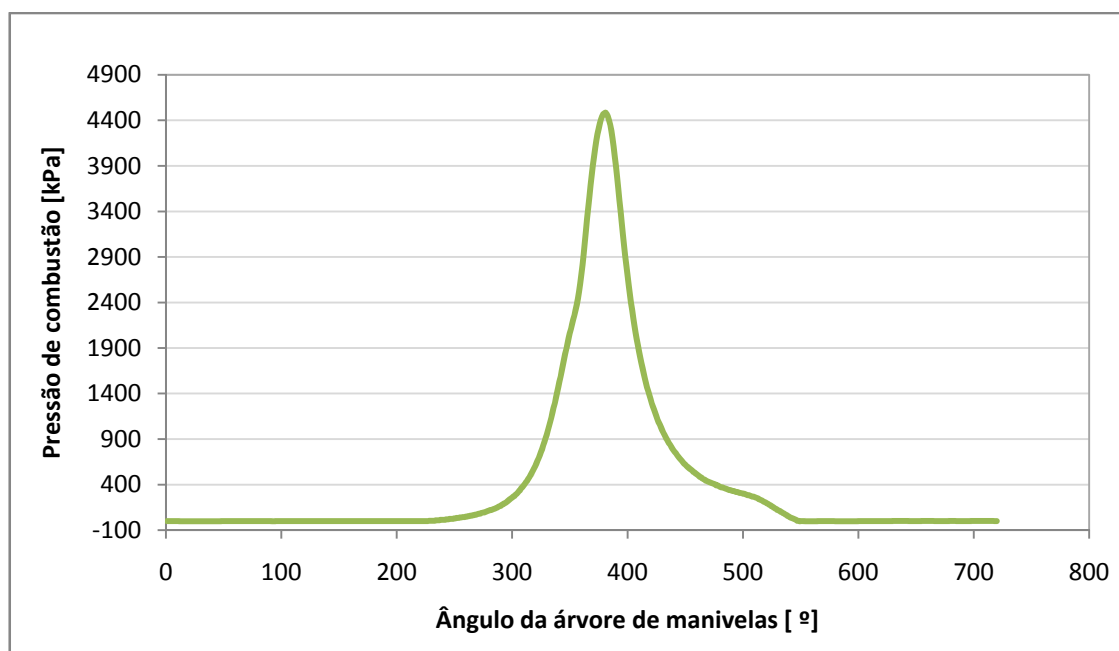
Comprimento da biela (l)	144,0 mm
Raio da árvore de manivelas (r)	37,8 mm
Rotação do motor (n)	2500 rpm

#### 9.1.1.6 Óleo lubrificante

Viscosidade do óleo a 100 °C ( $\mu$ )	0.012 Pas
--	-----------

### 9.1.1.7 Pressão de combustão

A curva de evolução da pressão na câmara de combustão ao longo do ciclo, utilizada nas análises, corresponde a uma condição de carga parcial, da ordem de 2/3 da carga plena do motor. A Figura 56 apresenta o gráfico ao longo do ciclo do motor.



**Figura 56. Gráfico da evolução da pressão na câmara de combustão**

Fonte: Elaborada pelo autor

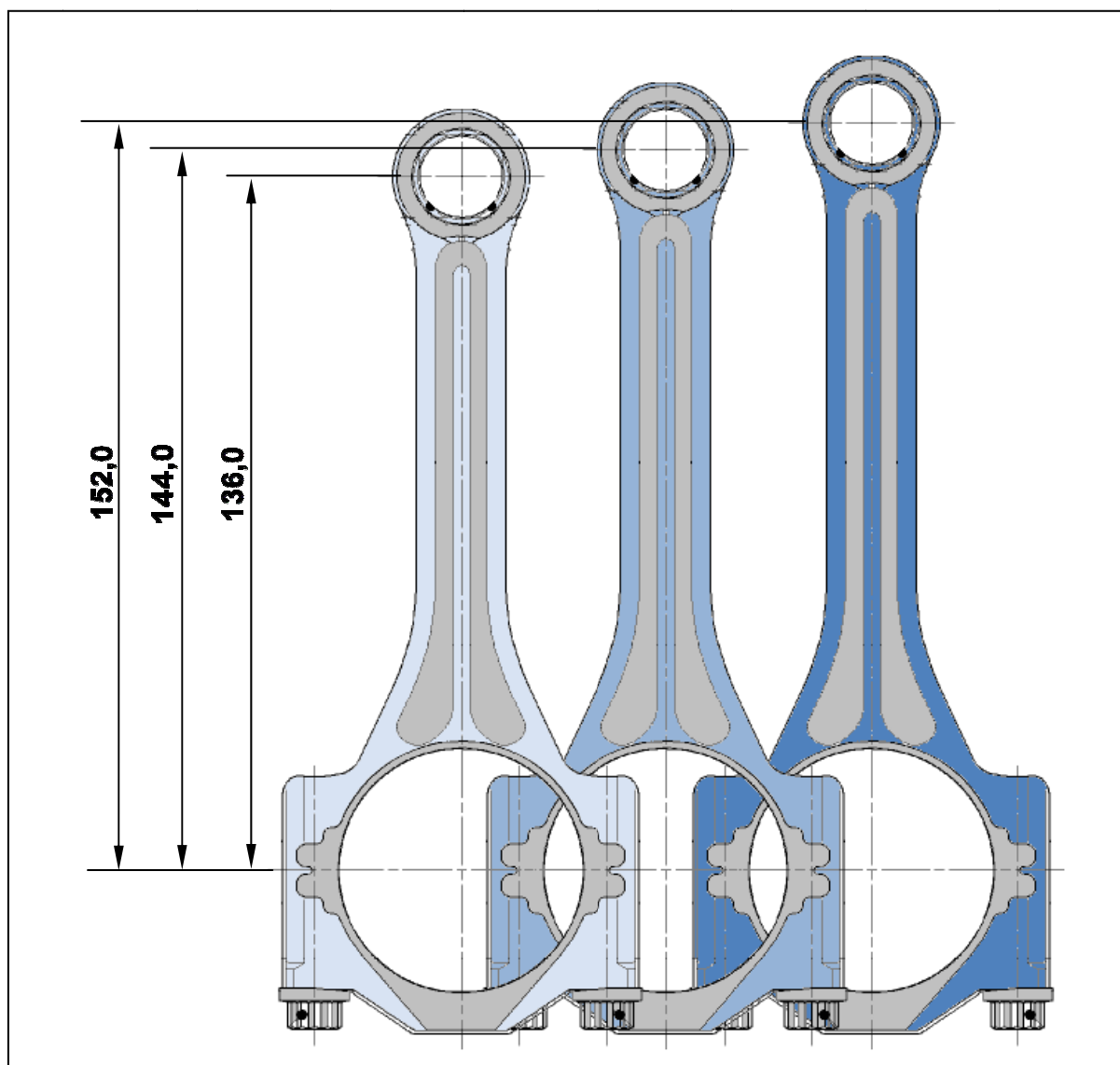
### 9.1.2 Parâmetros analisados

Terminada a apresentação dos dados necessários, ou seja, aqueles que correspondem ao motor atual, é feito o levantamento dos parâmetros e de suas grandezas que serão utilizados na análise. Conforme já exposto no início deste trabalho, foram avaliadas a influência do comprimento da biela, da altura das ondulações da superfície da saia do pistão e do *off-set* do pino do pistão.

#### 9.1.2.1 Comprimento da biela

O primeiro parâmetro analisado é o comprimento da biela. De acordo com o exposto na revisão bibliográfica, este parâmetro afeta a relação ' $l/r$ ', cuja influência sobre o atrito do motor é significativa. Ou seja, pretendeu-se, ao variar o comprimento da biela, reduzir a força normal à saia do pistão criada pelo mecanismo biela-manivela.

Sendo o comprimento atual da biela deste motor de 144 mm e o raio da árvore de manivela de 37,8 mm, tem-se uma relação  $l/r$  original de 3,8. De acordo com a geometria do motor é possível realizar alterações do conjunto, sem grandes dificuldades, de modo a aumentar o comprimento da biela até 152 mm.



**Figura 57. Comparativo do comprimento das bielas analisadas**

Fonte: Elaborada pelo autor

Assim, são analisadas outras duas relações  $l/r$ . Uma para uma biela de 136 mm e outra para uma biela de 152 mm. A Figura 57 apresenta um comparativo do comprimento de cada uma das bielas.

A Tabela 2 apresenta o valor dos parâmetros  $l/r$  de cada simulação realizada, variando-se o comprimento da biela. Para a simulação 1 tem-se todos os



parâmetros originais do motor, sem alterações, de modo a criar a referência para a análise.

**Tabela 2. Comprimentos de biela avaliados**

	<b>Simulação 1</b>	<b>Simulação 2</b>	<b>Simulação 3</b>
<b>Comprimento da biela (l)</b>	144,0 mm	136,0 mm	152,0 mm
<b>Relação l/r</b>	3,8	3,6	4,0

#### 9.1.2.2 *Altura da ondulação da superfície da saia ( $\Omega$ )*

O segundo parâmetro estudado quanto à sua influência no atrito mecânico do motor, e por sua vez no consumo de combustível, é a altura das ondulações da superfície da saia. De acordo com o estudo de Mansouri (2005) o aumento da folga proporciona um aumento da espessura do filme de óleo lubrificante que por sua vez diminui o contato metal com metal. Assim, além da redução esperada das perdas por atrito, é aqui também avaliado o comportamento dinâmico do pistão.

A Tabela 3 apresenta os valores das ondulações avaliadas nas simulações. Mais uma vez, a simulação número 1 é utilizada como referência, para fins de comparação entre os resultados obtidos. Na simulação 4 verifica-se uma redução da altura para 3  $\mu\text{m}$  e na simulação 5 uma redução para 2  $\mu\text{m}$ .

**Tabela 3. Folgas radiais entre o pistão e o cilindro avaliadas**

	<b>Simulação 1</b>	<b>Simulação 4</b>	<b>Simulação 5</b>
<b>Ondulação (<math>\Omega</math>)</b>	4,0 $\mu\text{m}$	3,0 $\mu\text{m}$	2,0 $\mu\text{m}$

#### 9.1.2.3 *Off-set do pino do pistão*

Finalmente o último parâmetro avaliado é o *off-set* do pino do pistão. Conforme apresentado anteriormente, este parâmetro é definido tendo em vista um compromisso entre atrito do motor e ruído devido à batida da saia no cilindro do motor. Assim, busca-se avaliar se para o motor em estudo é possível alterar este *off-*

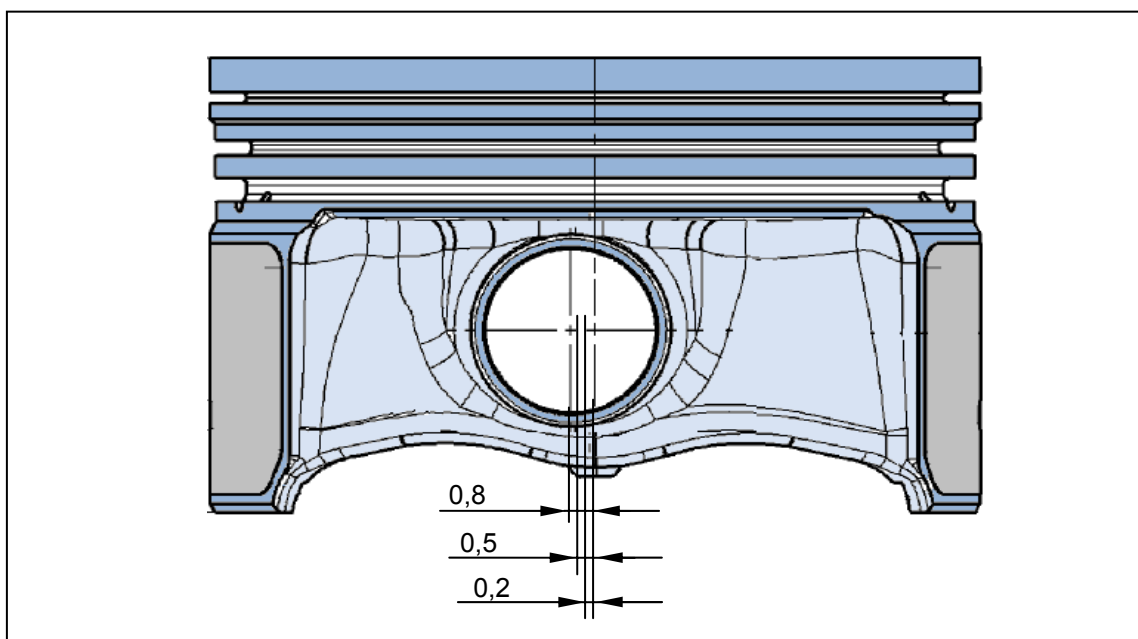
set sem causar fortes contatos metal com metal, bem como qual seria o ganho obtido com relação ao atrito na parede do cilindro.

A Tabela 4 apresenta os valores avaliados de *off-set* do pino do pistão. A simulação 1, cujo valor é de 0,5 mm, corresponde ao motor original, sendo a mesma simulação indicada na seção anterior. Já as simulações 6 e 7 correspondem à alteração do parâmetro com o objetivo de reduzir a força normal à saia, gerada na fase de expansão do motor.

**Tabela 4. *Off-set* do pino do pistão avaliados**

	<b>Simulação 1</b>	<b>Simulação 6</b>	<b>Simulação 7</b>
<b><i>Off-set</i> do pino do pistão (Cp)</b>	0,5 mm	0,2 mm	0,8 mm

Um esquema das alterações propostas para o *off-set* do pino do pistão também é apresentado na Figura 58 abaixo.



**Figura 58. Comparativo do *off-set* do pino do pistão analisados**

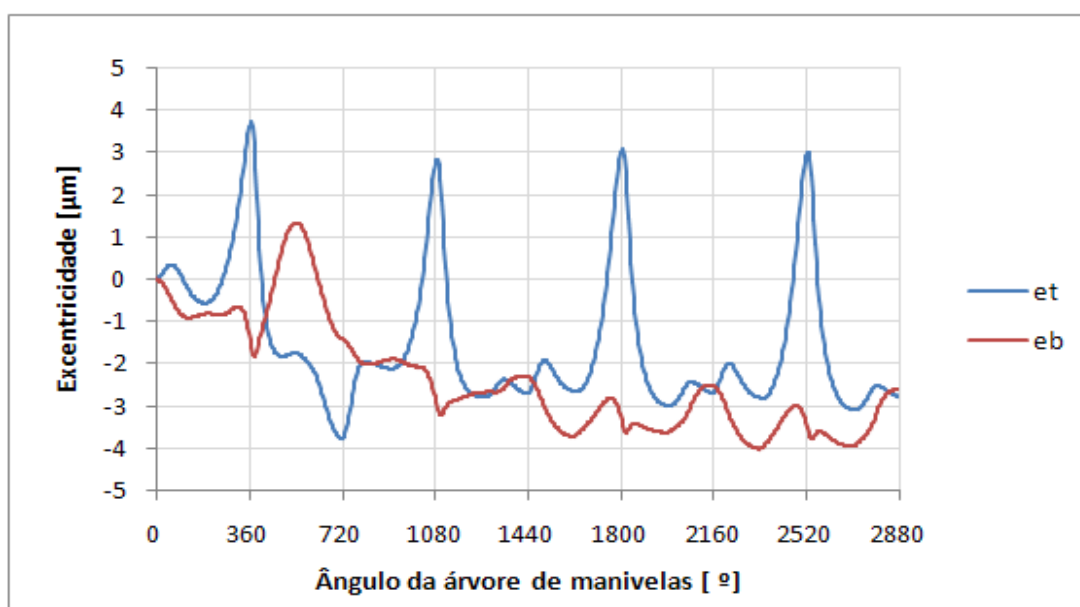
Fonte: Elaborada pelo autor

## 9.2 Resultados

Após o estabelecimento dos dados de entrada e parâmetros necessários, tem-se a etapa de análise das simulações. Em um primeiro momento é analisada a simulação com dados originais do motor em estudo, assim estabelecendo a condição de referência da análise paramétrica. Em seguida, são analisados os resultados das simulações em função da variação de cada parâmetro estudado e, finalmente, algumas considerações são realizadas com relação às características do modelo utilizado.

### 9.2.1 Conjunto original de parâmetros

Como mencionado anteriormente, as condições iniciais das simulações são tomadas nulas. Ou seja, as excentricidades ( $e_b$  e  $e_t$ ), dos pontos Pt e Pb, bem como suas respectivas velocidades na direção z ( $\dot{e}_b$  e  $\dot{e}_t$ ), são tomadas iguais a zero. Além disso, a posição da árvore de manivelas em seu ponto inicial corresponde ao início do ciclo. Assim, o pistão encontra-se centrado em relação ao cilindro do motor, com velocidade nula e localizado no PMS.



**Figura 59.** Gráfico das excentricidades  $e_t$  e  $e_b$ , durante os quatro primeiros ciclos de simulação, a 2500 rpm e com o conjunto de parâmetros originais do motor

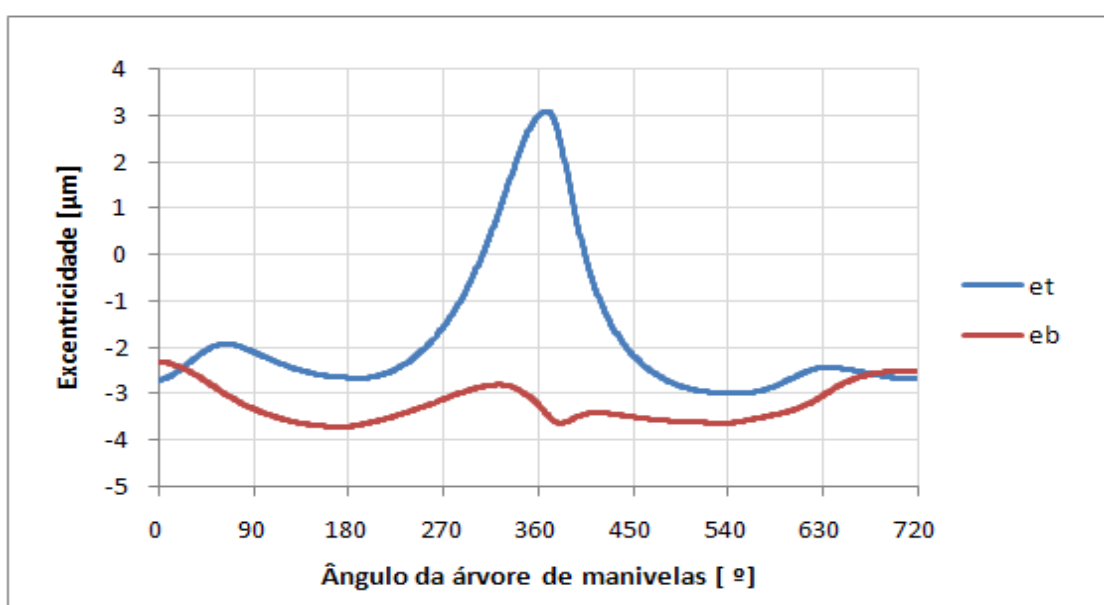
Fonte: Elaborado pelo autor

Com tais condições iniciais, verificou-se que a partir do terceiro ciclo do motor, o resultado obtido da trajetória do pistão já é cíclico, conforme pode ser

analisado na Figura 59, onde os quatro primeiros ciclos do motor são apresentados. Tal situação indica que a solução numérica converge para um resultado único e coerente. Assim, apenas o quarto ciclo do motor é considerado para efeito de análise.

A Figura 60 apresenta a evolução das variáveis de excentricidade do pistão ao longo do quarto ciclo do motor, em sua configuração original, operando a 2500 rpm. Tal evolução é registrada em função da posição da árvore de manivelas. Uma vez que o valor da ondulação da superfície da saia do pistão é de 4  $\mu\text{m}$  e o valor da folga radial é de 10  $\mu\text{m}$ , seria esperado contato entre o pistão e o cilindro sempre que o valor absoluto de excentricidade do ponto Pb ou Pt fosse maior que 6  $\mu\text{m}$ . No entanto, nota-se que para a atual condição tal situação não é observada, uma vez que a maior excentricidade corresponde a -3,8  $\mu\text{m}$ .

Como os pontos Pb e Pt pertencem à parte inferior e a parte superior da saia do pistão respectivamente, verifica-se que a inclinação do eixo do pistão, em relação ao eixo do cilindro, é proporcional a diferença existente entre as excentricidades. Desta forma, durante as fases de admissão e de início da exaustão do motor, o pistão permanece praticamente paralelo ao eixo do cilindro com leve inclinação. Em tais condições, os valores de  $e_b$  e  $e_t$  permanecem em fase. No final da exaustão e início da admissão, observa-se um cruzamento dos valores de  $e_b$  e  $e_t$ , indicando a variação da inclinação do pistão.

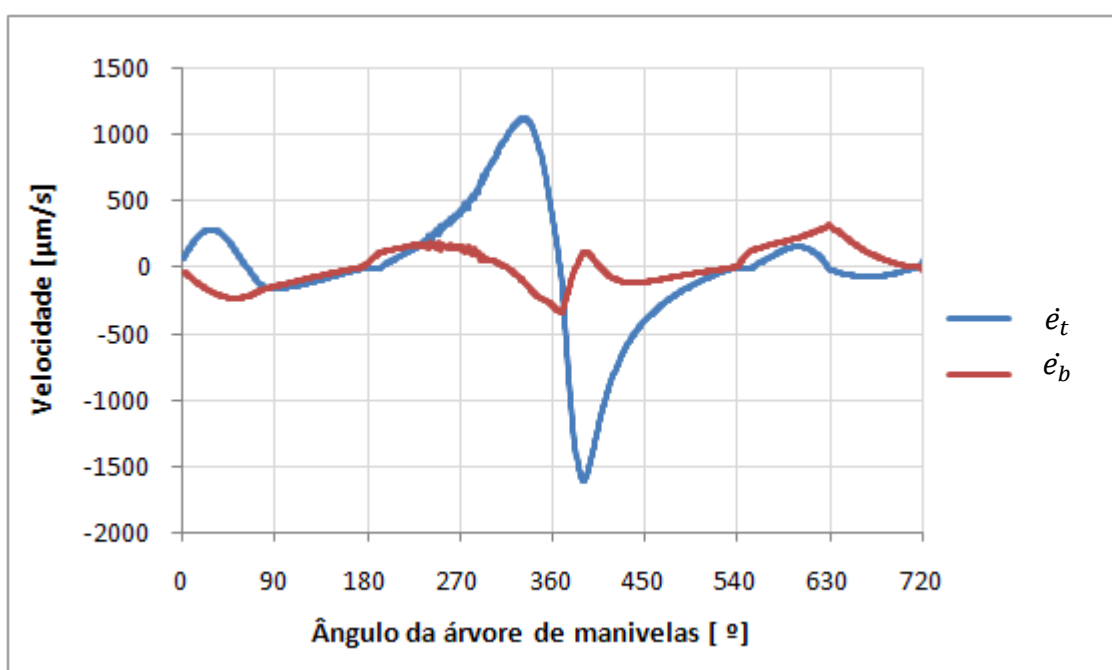


**Figura 60. Gráfico das excentricidades  $e_t$  e  $e_b$  a 2500 rpm e com o conjunto de parâmetros originais do motor**

Fonte: Elaborado pelo autor

No entanto, a maior variação da posição do pistão no interior do cilindro ocorre nas fases de compressão e expansão do motor, entre  $270^\circ$  e  $450^\circ$  da árvore de manivelas, devido ao aumento da pressão interna na câmara, proveniente da combustão. Como resultado, observa-se que o ponto Pt é deslocado de forma brusca, atingindo excentricidade máxima de  $3\text{ }\mu\text{m}$  no PMS do motor.

Já a Figura 61 apresenta os valores das velocidades ( $\dot{e}_b$  e  $\dot{e}_t$ ) dos pontos Pb e Pt na direção z. Conforme já comentado, verifica-se durante as fases de admissão e exaustão do motor, instantes onde as excentricidades  $e_b$  e  $e_t$  encontram-se em fase. Tal condição é confirmada ao analisar suas respectivas velocidades. Nota-se que entre  $90^\circ$  e  $180^\circ$ , bem como entre  $520^\circ$  e  $600^\circ$ , as velocidades  $\dot{e}_b$  e  $\dot{e}_t$  são praticamente iguais, indicando que o pistão praticamente não gira em torno de seu pino.



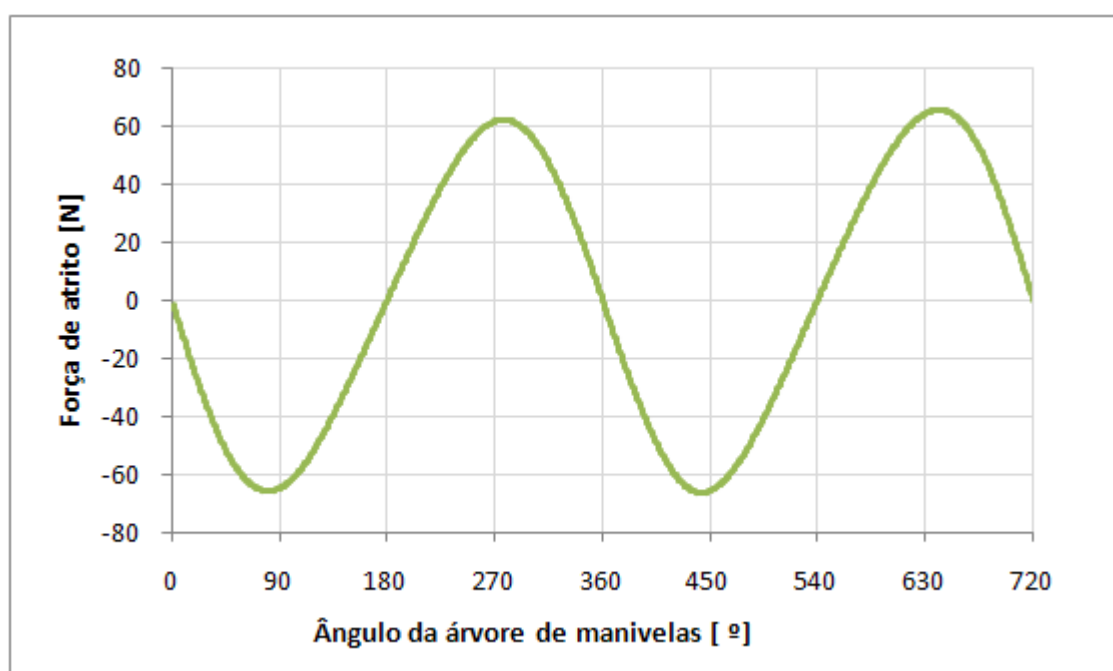
**Figura 61. Gráfico das velocidades dos pontos Pt e Pb a 2500 rpm e com o conjunto de parâmetros originais do motor**

Fonte: Elaborado pelo autor

Durante as fases de compressão e expansão, verifica-se grande velocidade do ponto Pt, atingido valores de até  $1,5\text{ mm/s}$ . Tal situação é proveniente do brusco deslocamento deste ponto, apresentado na Figura 60, devido a combustão. Uma vez que o ponto Pb permanece, durante praticamente todo o ciclo do motor, em torno de  $-3,5\text{ }\mu\text{m}$  deslocado do centro do cilindro, sua velocidade não ultrapassa valores de  $350\text{ }\mu\text{m/s}$ .

Visto que, nesta condição de operação do motor, não foi verificado contato entre o pistão e o cilindro do motor, a força de atrito existente nas saias do pistão é somente proveniente do filme hidrodinâmico existente. Desta forma, a força de resistência ao movimento do pistão torna-se diretamente proporcional à sua velocidade ao longo do eixo do cilindro. Conforme apresenta a Figura 62, a força de atrito atinge valores absolutos máximos em condições de meio curso do pistão, próximos a  $90^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $450^\circ$  e  $630^\circ$  da árvore de manivelas, onde é evidenciada a máxima velocidade do pistão na direção y.

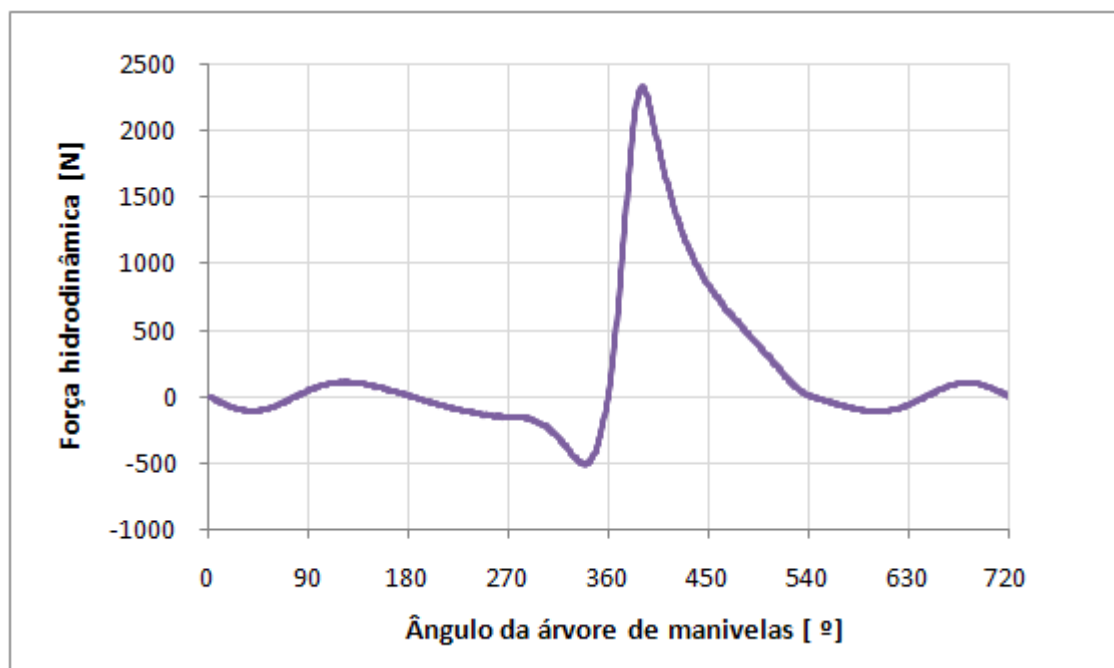
Neste caso, o comportamento da curva da força de atrito hidrodinâmico é do tipo senoidal, com valores máximos variando entre 60 N e -65 N. Uma vez que a velocidade do pistão é nula no PMS e no PMI, a força de atrito também será igual a zero nestas condições.



**Figura 62. Gráfico da força de atrito nas saias do pistão a 2500 rpm e com o conjunto de parâmetros originais do motor**

Fonte: Elaborado pelo autor

Finalmente a Figura 63 apresenta o gráfico da força normal aplicada às saias do pistão. Como não foi evidenciado contato entre o pistão e o cilindro, esta força corresponde à força hidrodinâmica aplicada ao longo do ciclo do motor.



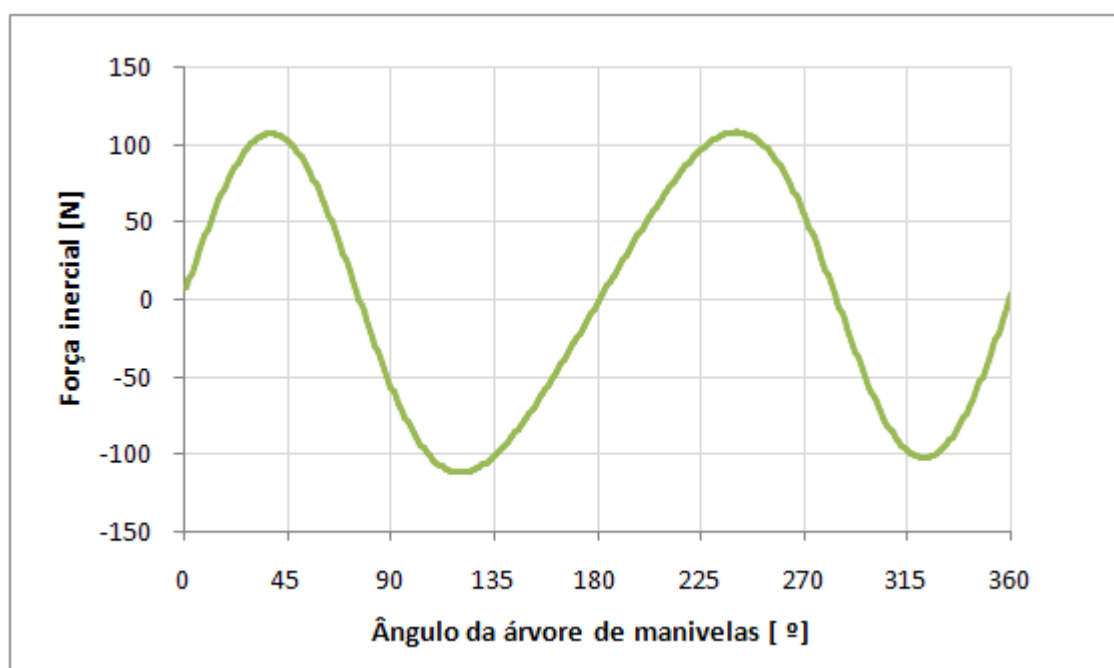
**Figura 63. Gráfico da força hidrodinâmica aplicada nas saias do pistão a 2500 rpm e com o conjunto de parâmetros originais do motor**

Fonte: Elaborado pelo autor

A força hidrodinâmica máxima ocorre na fase de expansão do motor com  $40^\circ$  após o PMS, devido à combustão. Nesta condição o valor da força hidrodinâmica atinge 2325 N. Conforme evidenciado da Figura 60, a força de combustão, devido à sua grande magnitude, desloca o ponto Pt cerca de  $6,5 \mu\text{m}$  do ponto Pb. Como consequência de tal deslocamento, tem-se a elevação da força normal hidrodinâmica, a qual é função do ângulo  $\eta$  do pistão e de sua velocidade no eixo y.

O motivo pelo qual não foi evidenciado contato entre o pistão e o cilindro se deve a dois fatores. Como comentado, a força hidrodinâmica tem sua intensidade proporcional à velocidade relativa dos corpos separados pelo filme hidrodinâmico. Adicionalmente, seu valor também é proporcional à espessura do filme. Assim, considerando a elevada velocidade à qual o pistão é submetido quando o motor gira a 2500 rpm, cerca de 10 m/s, bem como a pequena folga de trabalho de  $10 \mu\text{m}$ , tem-se como resultado uma pressão hidrodinâmica suficiente para manter a trajetória do pistão ao longo do cilindro. Em condições de menores rotações do motor, bem como maiores folga de montagem do pistão, são esperadas condições de contato entre o pistão e o cilindro.

Outra consequência da elevada amplitude de velocidade do pistão na direção do eixo do cilindro é a força inercial a qual é exposto. Ainda se nota na Figura 63 que, durante as fases de admissão e escape, onde a pressão na câmara de combustão é baixa, o comportamento da força hidrodinâmica é senoidal, com amplitude em torno de 100 N. Tal comportamento é resultado da força inercial, devida à massa do conjunto pistão e pino, bem como da elevada aceleração imposta. A Figura 64, a seguir, apresenta o gráfico desta força ao longo do ciclo do motor sem a presença de combustão. Nota-se que, por não ser função da pressão na câmara de combustão, o período desta força é de 360°.



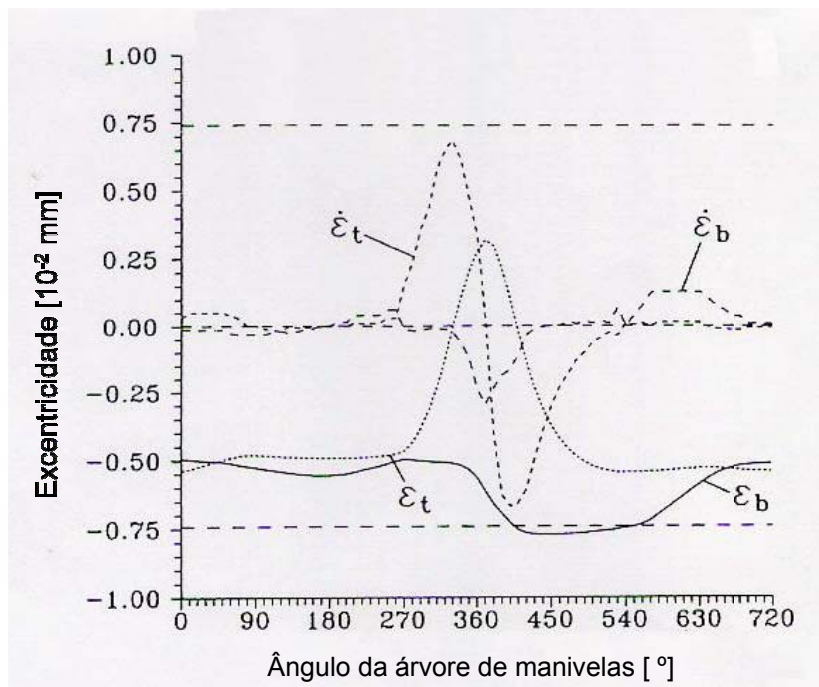
**Figura 64. Gráfico da força inercial na direção y devido a massa do pistão a 2500 rpm e com os parâmetros originais do motor**

Fonte: Elaborado pelo autor

Embora as condições iniciais e as características do motor sejam diferentes das de Zhu et. al (1992), é possível confrontar os resultados aqui obtidos com os resultados daqueles autores. A Figura 65 apresenta os valores das excentricidades  $e_b$  e  $e_t$ , bem como das velocidades  $\dot{e}_b$  e  $\dot{e}_t$ , extraídos do artigo de Zhu et. al (1992). Ao analisá-la, constata-se que os resultados apresentados anteriormente possuem



forte semelhança, sendo o comportamento das excentricidades e velocidades dos pontos Pb e Pt praticamente o mesmo.



**Figura 65. Resultado obtido por Zhu et. al (1992) das excentricidades  $\epsilon_t$  e  $\epsilon_b$ , e suas respectivas velocidades, a 1000 rpm com combustão.**

Fonte: ZHU, D. et al.: 1991, p.560 v.114.

Verifica-se, no entanto, que no resultado obtido por Zhu et. al (1992), ao contrário do observado na Figura 60, ocorreu contato entre o pistão e o cilindro durante a fase de expansão do motor, entre 400° e 500° da árvore de manivelas aproximadamente. Tal condição é justificada pela menor rotação do motor utilizada no artigo de Zhu et. al (1992), reduzindo a força de sustentação do filme hidrodinâmico e permitindo, assim, o contato observado.

Desta forma pode-se considerar os resultados aqui obtidos como corretos. Apesar de não ser possível compará-los com resultados experimentais, a correlação obtida ao confrontá-los com os resultados de Zhu et. al (1992), demonstra que o modelo numérico utilizado foi implementado de forma correta. Mais avaliações com relação à validação dos resultados são apresentadas no apêndice E.

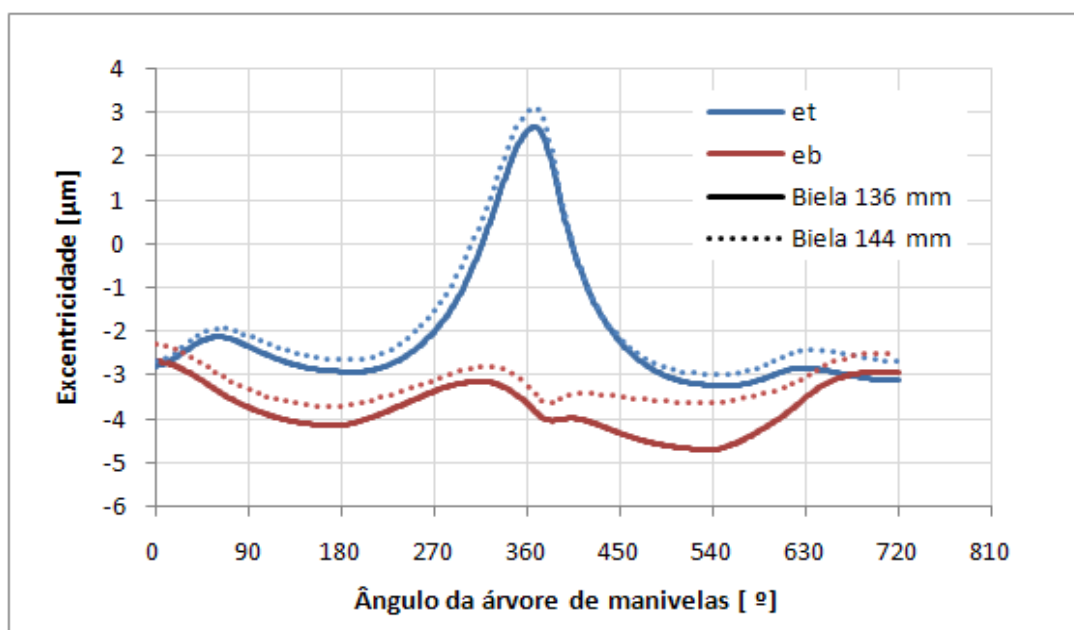
### 9.2.2 Análise paramétrica

O objetivo desta etapa é analisar a influência das alterações dos parâmetros, estabelecidos anteriormente, na dinâmica do pistão, bem como nos esforços envolvidos. Tem-se como foco de estudo determinar o melhor compromisso para redução das perdas por atrito, de modo a reduzir, por consequência, o consumo de combustível. Adicionalmente, são também analisados os resultados obtidos com relação ao deslocamento dos pontos Pb e Pt, e à força normal à saia do pistão.

#### 9.2.2.1 Comprimento da biela

Em sua configuração original, o motor aqui estudado possui uma biela com 144 mm de comprimento. Visto que seu curso é de 75,6 mm, tem-se uma relação “l/r” de 3,8. Conforme apresentado anteriormente, foram estudadas outras duas configurações, a primeira com uma biela de 136 mm, resultando em uma relação “l/r” de 3,6, e a segunda com uma biela de 152 mm, resultando em uma relação “l/r” de 4,0.

A Figura 66 a seguir apresenta o comparativo das excentricidades  $e_b$  e  $e_t$  dos pontos Pb e Pt respectivamente. Nela, as linhas pontilhadas indicam as posições de Pb e Pt quando com a biela original de 144 mm. Já as linhas cheias correspondem às posições quando com a biela de 136 mm.



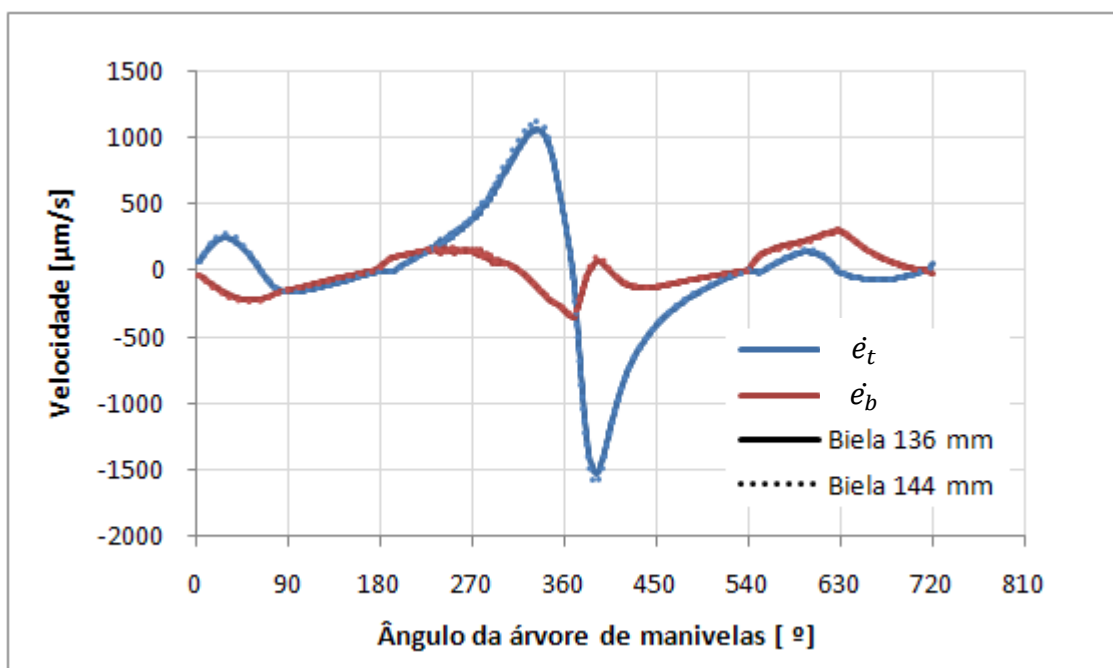
**Figura 66.** Gráfico comparativo das excentricidades  $e_t$  e  $e_b$  entre sistemas com biela de comprimento de 136 mm e de 144 mm, com o motor a 2500 rpm

Fonte: Elaborado pelo autor

Apesar da alteração da relação “ $l/r$ ”, não são evidenciadas grandes variações no comportamento das excentricidades  $e_b$  e  $e_t$  ao longo do ciclo do motor. De um modo geral, verifica-se que no caso da biela mais curta, o pistão trabalha mais deslocado em relação ao centro do cilindro, ou seja, com excentricidades de maiores valores absolutos.

Durante as fases de admissão e compressão do motor, a diferença entre as excentricidades de cada um dos casos permanece praticamente constante em torno de  $0,3\ \mu\text{m}$ . No entanto, durante a fase de expansão e escape, observam-se maiores diferenças com relação à posição do ponto Pb, resultando em maior inclinação do pistão em relação ao eixo do cilindro. Com a biela de 136 mm, a excentricidade  $e_b$  atinge valor de  $-4,7\ \mu\text{m}$  em posição próxima ao PMI ( $540^\circ$ ). Tal condição é resultado da maior força normal aplicada à saia devido à menor relação “ $l/r$ ”.

Devido ao comportamento semelhante das excentricidades dos pontos Pb e Pt apresentado, verifica-se que as velocidades,  $\dot{e}_b$  e  $\dot{e}_t$ , de cada configuração, confundem-se uma com a outra. Observa-se na Figura 67 abaixo pequena diferença na velocidade de  $\dot{e}_t$  quando a árvore de manivelas atinge valores próximos a  $300^\circ$ . Tal situação resulta na diferença observada de  $0,4\ \mu\text{m}$  nos valores máximos de  $e_t$  durante o PMS após a compressão dos gases.



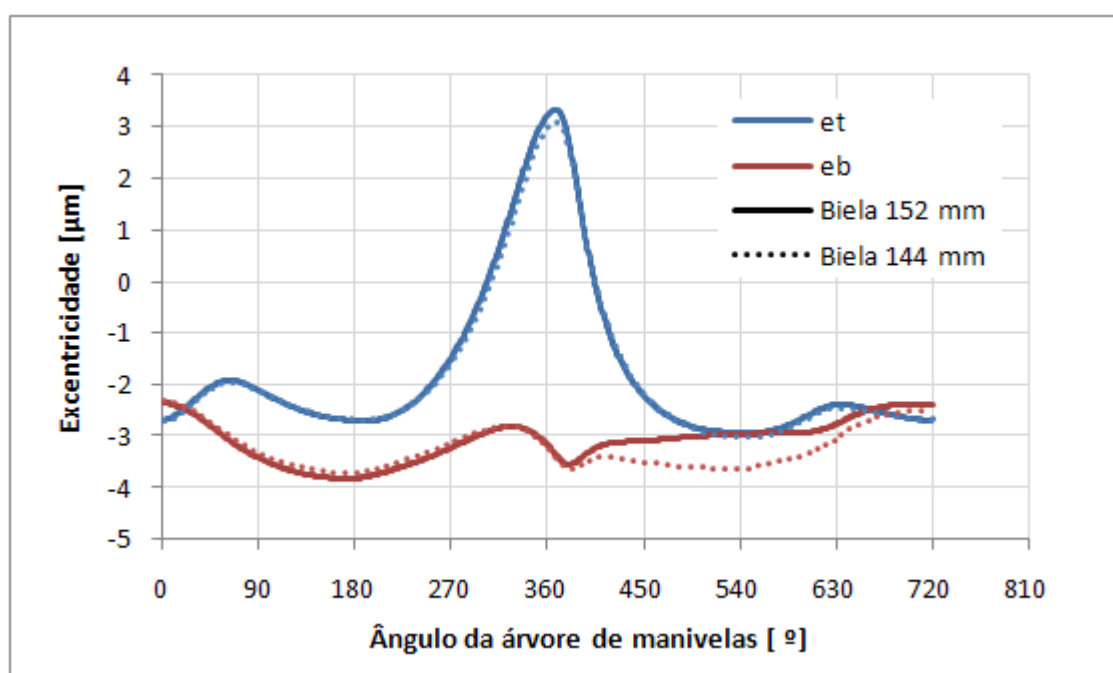
**Figura 67. Gráfico comparativo das velocidades dos pontos Pt e Pb entre sistemas com biela de comprimento de 136 mm e de 144 mm, com o motor a 2500 rpm**

Fonte: Elaborado pelo autor

Assim como na análise comparativa realizada com a biela de 136 mm, a Figura 68 apresenta o comparativo das excentricidades de Pb e Pt considerando a biela de 152 mm e a biela original de 144 mm. Mais uma vez, nenhuma grande variação é observada com relação às excentricidades  $e_b$  e  $e_t$ .

Nesta simulação, embora também se tenha alterado a relação “ $l/r$ ”, não se observa um deslocamento médio dos pontos Pb e Pt com relação ao centro do cilindro. Nota-se ainda, que durante as fases de admissão e compressão do motor, ambas as configurações apresentam o mesmo comportamento.

A única diferença nas excentricidades  $e_b$  e  $e_t$  de cada uma das configurações ocorre nas fases de expansão e exaustão do motor. Uma vez que são esperadas menores forças normais às saias, devido à maior relação “ $l/r$ ”, observa-se nestas fases menor ângulo  $\eta$  do pistão, resultando por sua vez menor pressão hidrodinâmica. Quando a árvore de manivelas atinge valor próximo a  $540^\circ$ , a superfície do pistão permanece praticamente paralela à superfície do cilindro, reduzindo as forças de atrito e normais à saia.



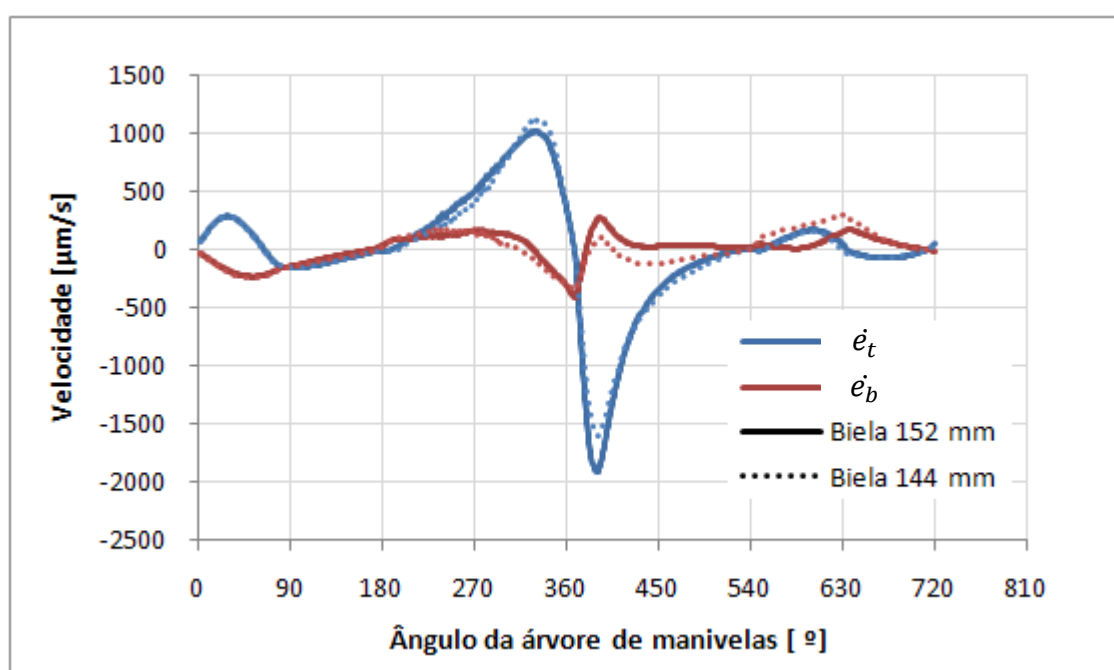
**Figura 68. Gráfico comparativo das excentricidades  $e_t$  e  $e_b$  entre sistemas com biela de comprimento de 152 mm e de 144 mm, com o motor a 2500 rpm**

Fonte: Elaborado pelo autor

A diferença verificada nas fases de expansão e exaustão do motor, entre  $400^\circ$  e  $630^\circ$  da árvore de manivelas também é observada ao se analisar as

velocidades  $\dot{e}_b$  e  $\dot{e}_t$  dos pontos Pb e Pt, na Figura 69. No caso da biela de 152 mm, quando a árvore de manivelas atinge cerca de  $400^\circ$ , a velocidade  $\dot{e}_t$  atinge seu valor absoluto máximo de  $1900 \mu\text{m/s}$ , com direção para o lado de pressão do cilindro, contra apenas  $1600 \mu\text{m/s}$  do resultado obtido com a biela de 144 mm. Como consequência, com a biela de 152 mm, o ponto Pt atinge maior excentricidade,  $3,3 \mu\text{m}$ , aumentando levemente a inclinação do pistão com relação ao eixo do cilindro.

No entanto, durante as fases de expansão e exaustão do motor, verifica-se maior velocidade  $\dot{e}_b$  do ponto Pb com direção ao lado de contra-pressão do cilindro quando com a biela de 152 mm. Tal situação resulta na diferença já comentada com relação à excentricidade  $e_b$ .



**Figura 69. Gráfico comparativo das velocidades dos pontos Pt e Pb entre sistemas com biela de comprimento de 152 mm e de 144 mm, com o motor a 2500 rpm**

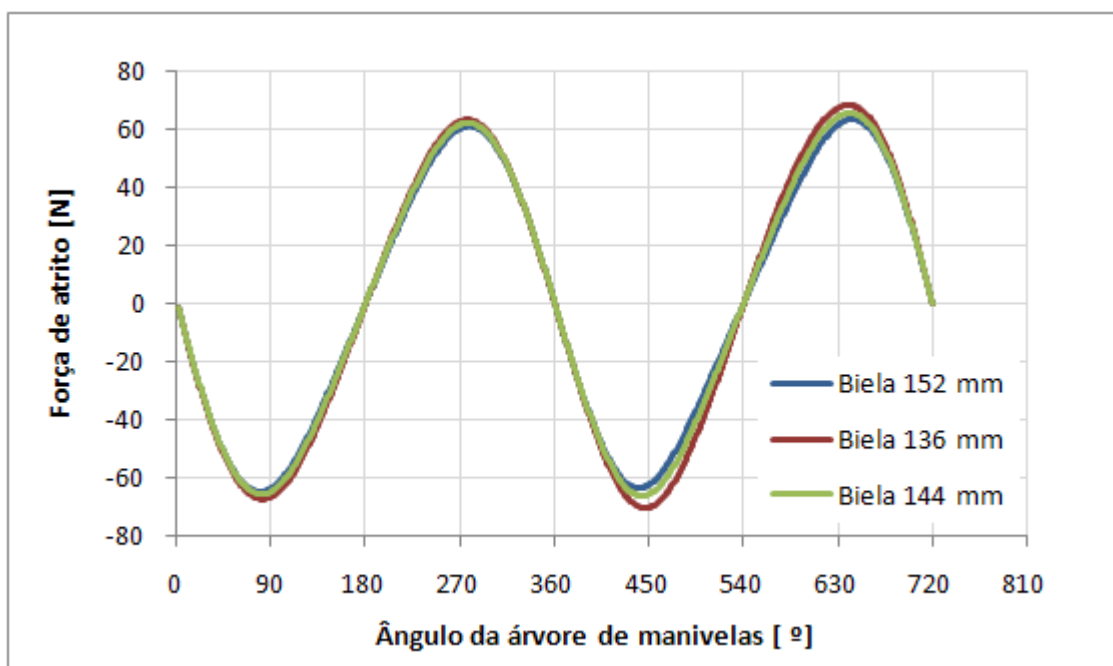
Fonte: Elaborado pelo autor

Realizadas as análises das excentricidades para cada uma das situações simuladas, torna-se possível avaliar o comportamento da força de atrito existente nas saias do pistão. Mais uma vez, não existiram instantes onde tenha ocorrido contato entre a saia do pistão e o cilindro, independentemente do comprimento de biela. Assim, a força de atrito foi sempre resultado da ação de lubrificação hidrodinâmica.

A Figura 70, a seguir, apresenta um gráfico comparativo entre as forças de atrito obtidas ao longo do ciclo do motor para cada uma das situações. Assim como

observado nos estudos de Wakabayashi et al. (2003) e Adachi et al. (1998), os resultados obtidos indicam que a força de atrito nas saias do pistão se reduz com o aumento da relação “ $l/r$ ”.

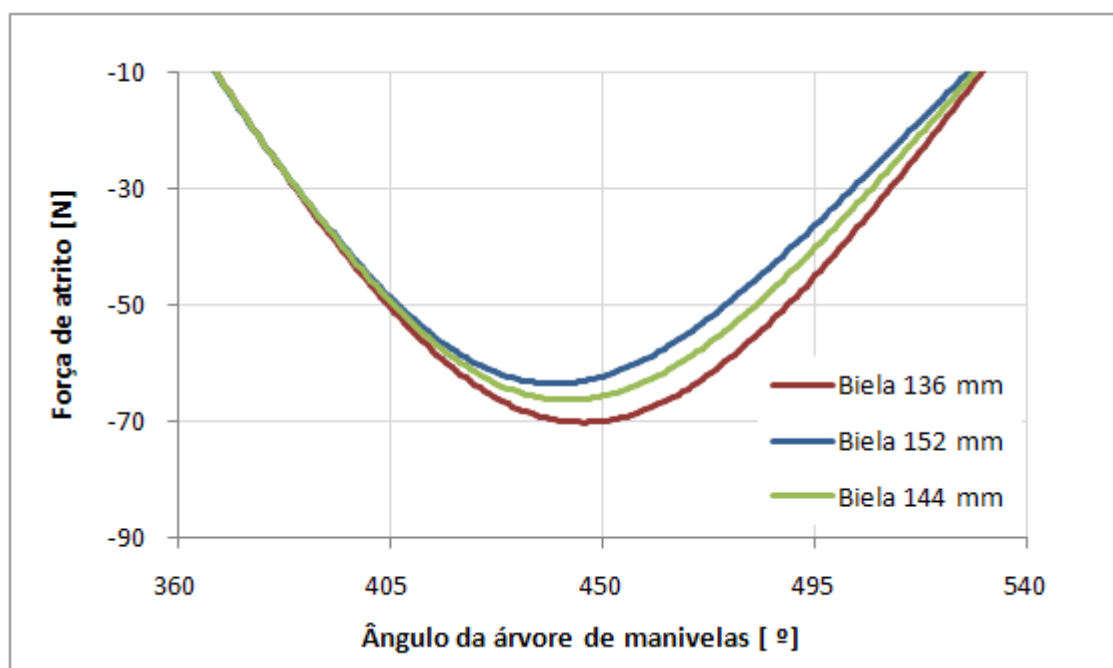
Durante a primeira revolução do ciclo do motor, pequenas variações podem ser encontradas. Tal resultado é compatível com os resultados das excentricidades em tais instantes, onde pouca diferença foi observada. Isto ocorre, pois nas fases de admissão e compressão do motor, o pistão é submetido a esforços muito menores quando comparados àqueles impostos durante a combustão.



**Figura 70. Gráfico comparativo da força de atrito nas saias do pistão entre sistemas com bielas de comprimento de 152 mm, 144m e 136 mm, com o motor a 2500 rpm**

Fonte: Elaborado pelo autor

Desta forma, a partir de 360°, as diferenças obtidas nos valores máximos das forças de atrito tornam-se maiores. Durante a fase de expansão do motor ocorrem as maiores diferenças. A Figura 71 apresenta um detalhe desta fase.



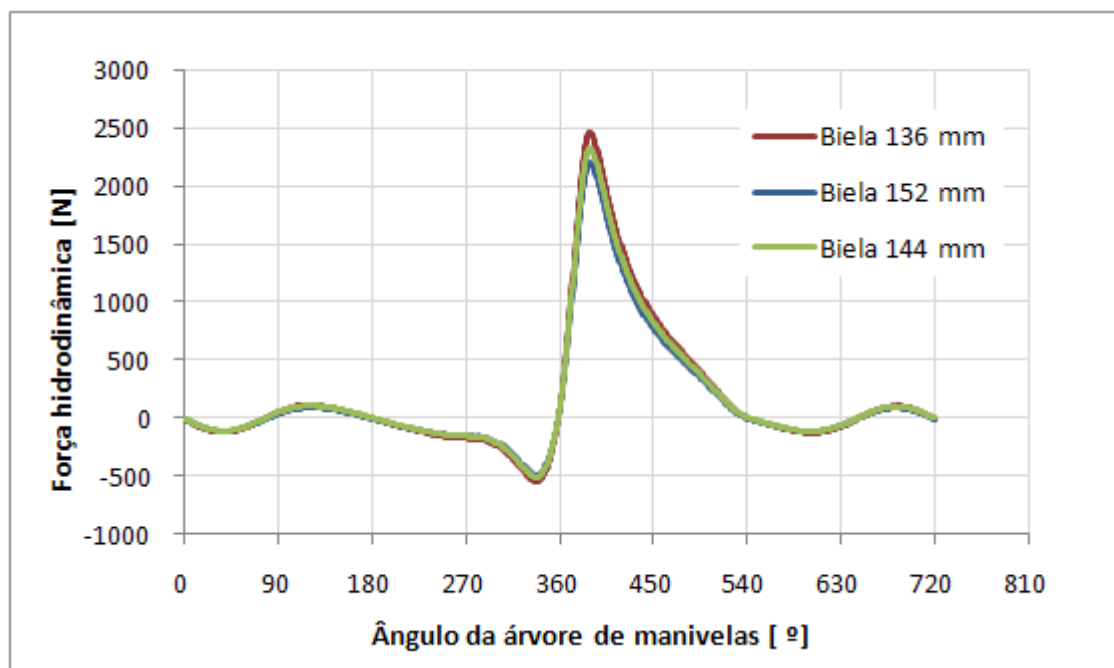
**Figura 71. Gráfico comparativo da força de atrito nas saias do pistão entre sistemas com bielas de comprimento de 152 mm, 144 mm e 136 mm com o motor a 2500 rpm, na fase de expansão do motor**

Fonte: Elaborado pelo autor

Ao alterar a relação “ $l/r$ ” para 3,6 com a biela de 136 mm, gerou-se um aumento de 6% no valor máximo da força de atrito, atingindo 70,3 N. Este resultado é reflexo das maiores excentricidades já apresentadas no mesmo instante do ciclo na Figura 66.

Em contrapartida, com a biela mais longa de 152 mm e relação “ $l/r$ ” de 4,0 obteve-se redução de 4% no valor máximo, reduzindo-se para 64,2 N. De forma semelhante, verifica-se que, neste instante, as excentricidade de  $P_b$  e  $P_t$  são menores quando com a biela de 152 mm.

Finalmente analisa-se o comportamento das forças normais às saias do pistão que, neste caso, na ausência de contato metal-metal, têm natureza unicamente hidrodinâmica. Durante as fases de admissão, início da compressão e exaustão do motor não ocorreram alterações na força hidrodinâmica em cada uma das configurações aqui simuladas. Conforme já comentado, os esforços envolvidos durante tais fases possuem menor magnitude. Adicionalmente, o comportamento das excentricidades de  $P_b$  e  $P_t$  foram muito semelhantes em tais condições.



**Figura 72. Gráfico comparativo da força normal hidrodinâmica aplicada às saias do pistão entre sistemas com bielas de comprimento de 152 mm, 144m e 136 mm, com o motor a 2500 rpm**

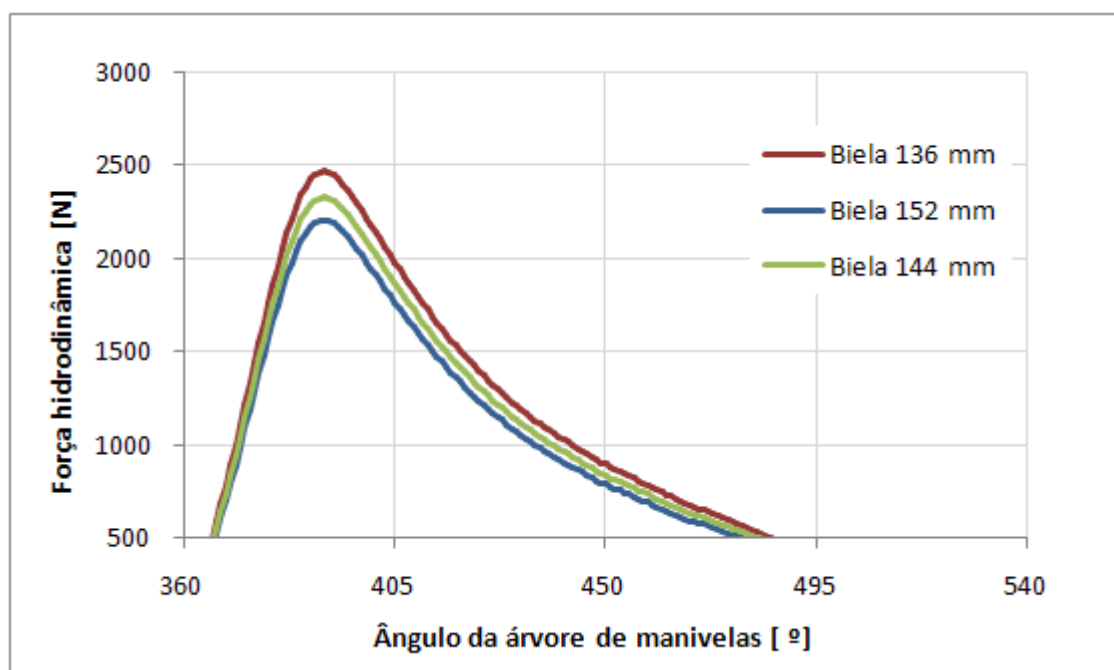
Fonte: Elaborado pelo autor

No entanto, a partir do momento onde os esforços são aplicados no topo do pistão, provenientes da queima do combustível, o que se dá em torno de  $300^\circ$  da árvore de manivelas, são verificadas variações nas forças hidrodinâmicas aplicadas à saia do pistão, em função do comprimento da biela. Conforme comentado anteriormente, o aumento da relação “ $l/r$ ” reduz o ângulo ( $\Phi$ ) de trabalho da biela em relação ao eixo do cilindro, reduzindo, portanto, a componente na direção  $z$  da força reativa da biela. Com a biela de 136 mm um ângulo  $\Phi$  máximo de  $16^\circ$ , já com a biela de 152 mm o ângulo  $\Phi$  máximo se reduz para  $14^\circ$ .

Desta forma, durante a fase de expansão, onde ocorrem os maiores esforços no topo do pistão e, por sua vez, as maiores forças de reação da biela, verificam-se diferenças significativas das forças hidrodinâmicas aplicadas à saia do pistão. A Figura 73 apresenta o detalhe das forças hidrodinâmicas entre  $360^\circ$  e  $540^\circ$ .

Nota-se que independentemente da relação “ $l/r$ ” o valor máximo ocorre em  $390^\circ$  da árvore de manivelas. Na condição original com a biela de 144 mm a força hidrodinâmica máxima é de 2330 N. No caso da biela de 136 mm houve um aumento de 10% atingindo 2470N. Já para a biela de 152 mm verificou-se uma redução na força máxima de 6%, atingindo 2200N.





**Figura 73. Gráfico comparativo da força hidrodinâmica aplicada às saias do pistão entre sistemas com bielas de comprimento de 152 mm, 144 mm e 136 mm, com o motor a 2500 rpm, na fase de expansão do motor**

Fonte: Elaborado pelo autor

Verifica-se, portanto, que o aumento da relação “ $l/r$ ”, através do aumento do comprimento da biela para 152 mm, realmente resultou na redução dos esforços de atrito na saia do pistão. No entanto, tal redução pode não ter sido tão expressiva devido ao fato de, nesta condição de operação do motor, não ocorrer contato entre o pistão e o cilindro.

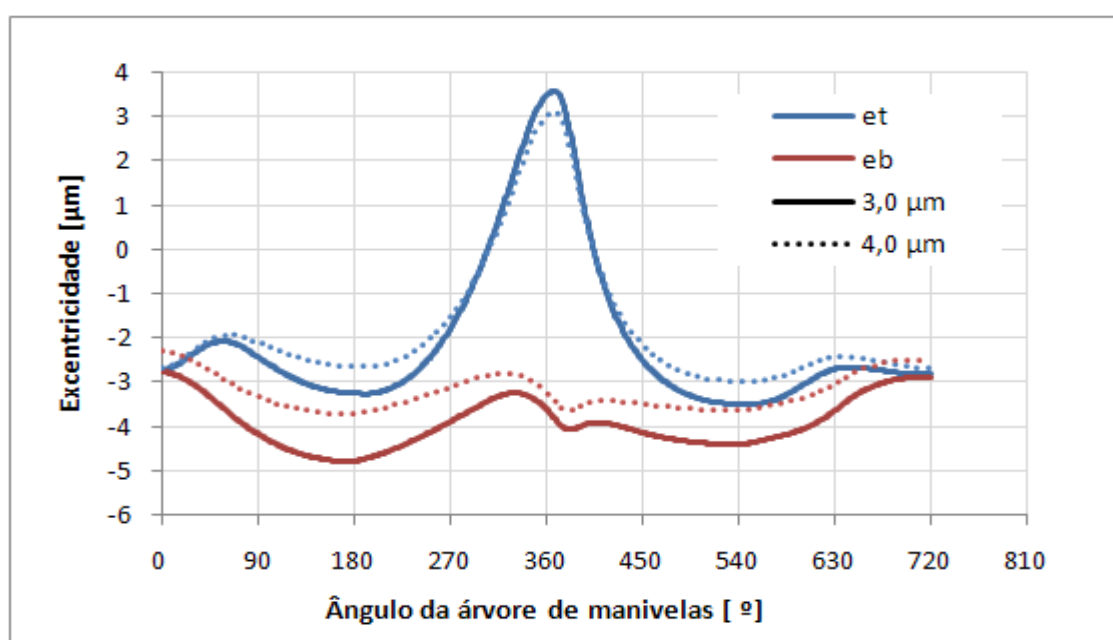
Mesmo assim, a alteração do comprimento da biela pode trazer benefícios sensíveis, uma vez que reduz, de forma mais significativa, a força normal aplicada à saia do pistão. O primeiro benefício deste resultado está na redução da excitação do bloco do motor por parte do pistão, reduzindo, conseqüentemente, os níveis acústicos do motor. Adicionalmente, a redução dos esforços aplicados à saia permite a redução de sua estrutura com conseqüente redução da massa do pistão, ou até mesmo a utilização de materiais menos nobres, reduzindo o custo dos pistões utilizados.

A aplicabilidade desta alteração depende, portanto, das características construtivas do motor. Deve-se, assim, realizar uma análise crítica dos benefícios obtidos, como possível redução de custo dos pistões ou redução dos níveis acústicos, considerando a complexidade de aplicar uma biela mais longa, dentro das margens de alteração permitidas pelo motor em questão.

### 9.2.2.2 Altura da ondulação da superfície da saia ( $\Omega$ )

O pistão aqui estudado possui ondulações na superfície da saia cuja altura é originalmente de  $4,0\ \mu\text{m}$ . Conforme apresentado anteriormente, foram estudadas outras duas condições com a redução deste valor, uma com a altura da ondulação de  $3,0\ \mu\text{m}$  e outra de  $2,0\ \mu\text{m}$ . Tais alterações correspondem a uma melhoria no acabamento superficial do pistão através do processo de usinagem ou até mesmo através da aplicação de camada de grafite para redução das imperfeições e do coeficiente de atrito.

Inicialmente são analisados os efeitos destas ações com relação à dinâmica do pistão. Assim, a Figura 74 apresenta o comparativo das excentricidades  $e_b$  e  $e_t$  dos pontos Pb e Pt respectivamente, entre pistões com ondulações de  $4,0\ \mu\text{m}$  e  $3,0\ \mu\text{m}$ .



**Figura 74. Gráfico comparativo das excentricidades  $e_t$  e  $e_b$  entre sistemas com amplitude de ondulação da superfície da saia de  $3,0\ \mu\text{m}$  e de  $4,0\ \mu\text{m}$ , com o motor a 2500 rpm**

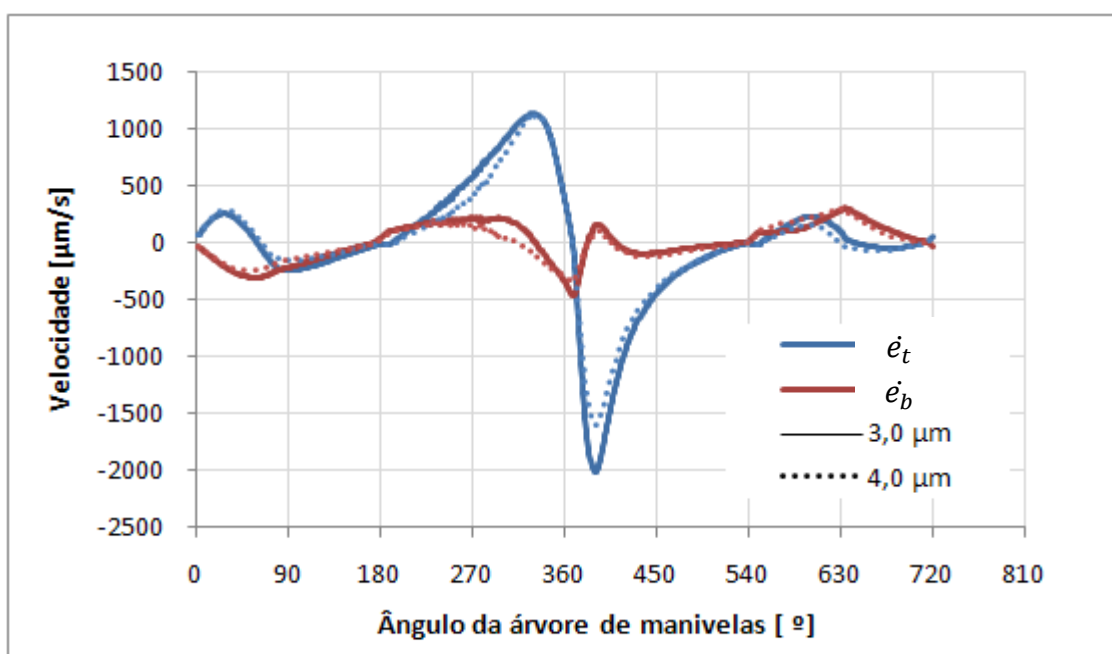
Fonte: Elaborado pelo autor

De acordo com o apresentado anteriormente, a pressão hidrodinâmica do filme existente entre as duas superfícies é também função das ondulações presentes na saia do pistão. Ao reduzir a altura das ondulações é esperada uma redução da pressão para uma mesma condição. Como consequência deste fenômeno, observa-se, para o caso da altura de  $3,0\ \mu\text{m}$ , maiores deslocamentos dos pontos Pb e Pt, de

modo a se obter a mesma pressão hidrodinâmica da condição original. Ainda assim não são evidenciados condições de contato entre o pistão e o cilindro do motor.

Embora o comportamento da movimentação para ambos os casos seja bastante semelhante, observa-se maior variação das excentricidades  $e_b$  e  $e_t$  para a altura de 3,0  $\mu\text{m}$ . Nota-se que o pistão torna-se mais vulnerável às variações dos esforços aos quais é solicitado. Quando o pistão atinge o PMI ao término da fase de admissão, em 180° da árvore de manivelas, por exemplo, a excentricidade  $e_b$  atinge seu valor absoluto máximo de 4,8  $\mu\text{m}$  para o caso da ondulação de 3,0  $\mu\text{m}$ , contra 3,7  $\mu\text{m}$  com ondulação de 4,0  $\mu\text{m}$ .

Como são maiores os deslocamentos observados dos pontos Pb e Pt, são também esperadas maiores velocidades. De acordo com a Figura 75 abaixo, de um modo geral, as velocidades  $\dot{e}_b$  e  $\dot{e}_t$  são maiores ao longo de todo ciclo do motor no caso das ondulações com altura de 3,0  $\mu\text{m}$ .

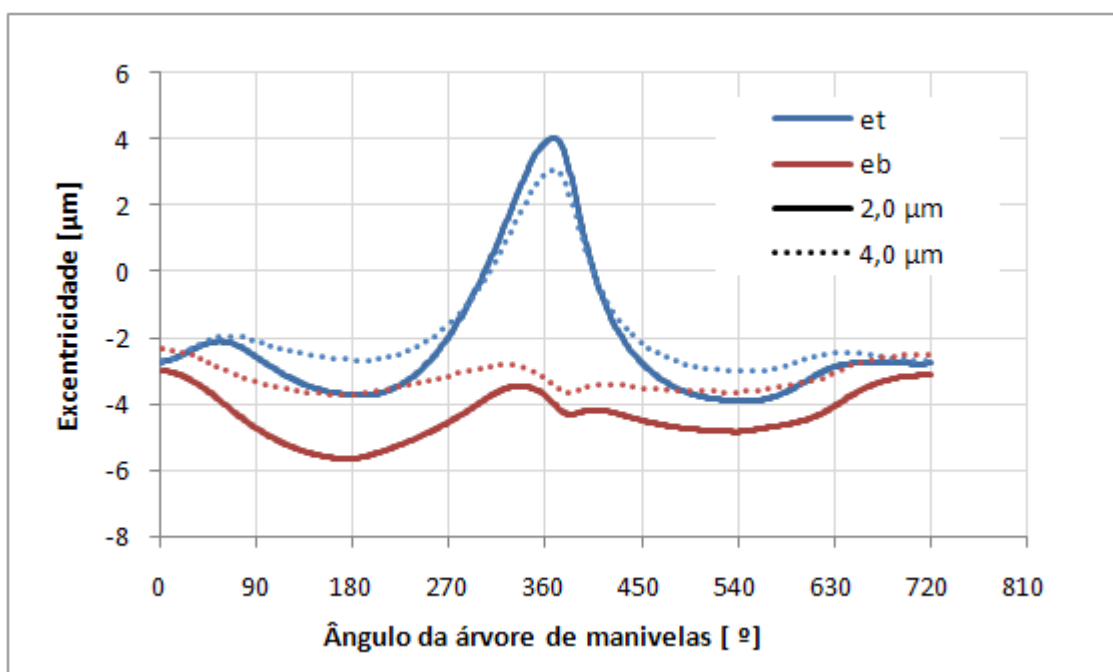


**Figura 75. Gráfico comparativo das velocidades dos pontos Pt e Pb entre sistemas com amplitude de ondulação da sup. da saia de 3,0  $\mu\text{m}$  e de 4,0  $\mu\text{m}$ , com o motor a 2500 rpm**  
Fonte: Elaborado pelo autor

As maiores diferenças são encontradas nas fases do motor onde são aplicados maiores esforços ao pistão, ou seja, as fases de compressão e expansão. Nota-se que entre 200° e 300° da árvore de manivelas a velocidade  $\dot{e}_t$  é cerca de 150 a 200  $\mu\text{m/s}$  maior. Tal comportamento é também evidenciado na velocidade  $\dot{e}_b$  do ponto Pb.

Finalmente durante a fase de expansão, com  $390^\circ$  da árvore de manivelas, a velocidade do ponto Pt atinge  $-2014 \mu\text{m/s}$ , enquanto que com ondulações de  $4,0 \mu\text{m}$ , a velocidade neste instante do ciclo atinge somente  $-1611 \mu\text{m/s}$ .

Em seguida são analisados os deslocamentos para o segundo caso estudado, onde a redução da altura das ondulações é ainda maior. A Figura 76, abaixo, apresenta a evolução das excentricidades  $e_b$  e  $e_t$  dos pontos Pb e Pt para os casos de amplitudes de ondulação de  $2,0 \mu\text{m}$  e de  $4,0 \mu\text{m}$ .



**Figura 76.** Gráfico comparativo das excentricidades  $e_t$  e  $e_b$  entre sistemas com amplitude de ondulação da superfície da saia de  $3,0 \mu\text{m}$  e de  $4,0 \mu\text{m}$ , com o motor a 2500 rpm

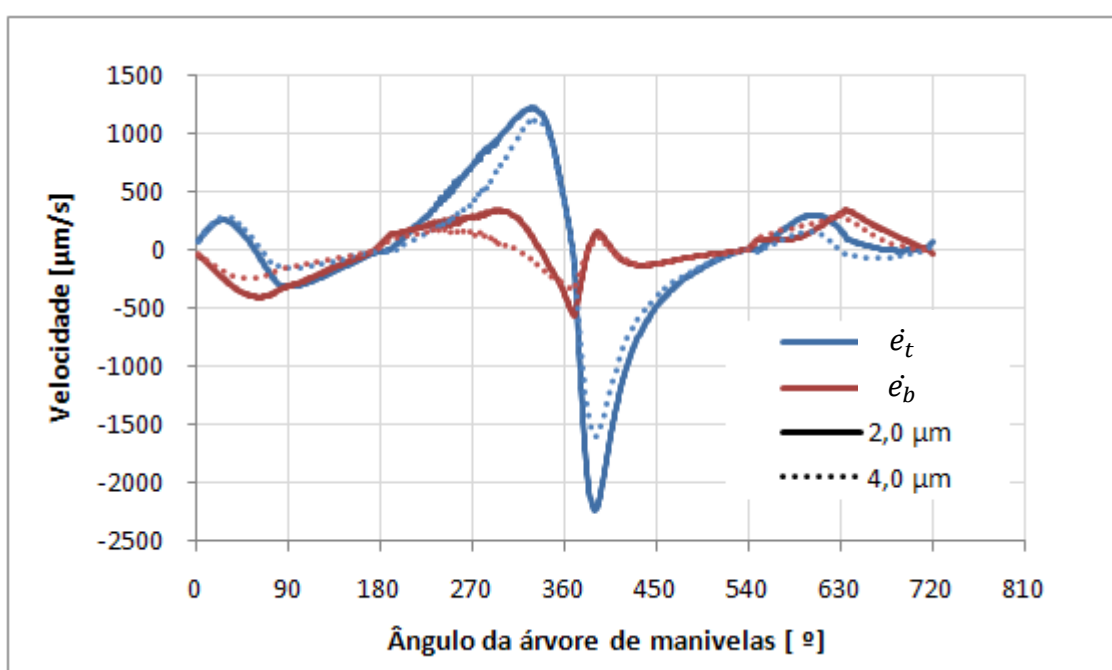
Fonte: Elaborado pelo autor

Ao observar o gráfico dos deslocamentos dos pontos Pb e Pt, nota-se, assim como evidenciado no caso de altura de  $3,0 \mu\text{m}$ , aumento ainda maior nos valores das excentricidades ao longo do ciclo do motor. Conclui-se, portanto, que ao reduzir a altura das ondulações presentes nas saias do pistão, permite-se ao pistão maior movimentação dentro do cilindro, com conseqüente aumento das excentricidades  $e_b$  e  $e_t$ . Ainda assim, não houve contato entre o pistão e o cilindro. Isto ocorre, pois ao se reduzir a altura das ondulações, aumenta-se a excentricidade necessária para eliminar o filme hidrodinâmico local e permitir o contato metal com metal.

Ainda na Figura 76, verifica-se que, ao final da fase de admissão, ambas as excentricidades  $e_b$  e  $e_t$  são cerca de  $1,0 \mu\text{m}$  e  $2,0 \mu\text{m}$  maiores, atingindo valores de -

3,8  $\mu\text{m}$  e -5,7  $\mu\text{m}$  respectivamente. Já ao final da fase de compressão e início da combustão, quando o pistão atinge o PMS, verifica-se um deslocamento do ponto Pt de 4,0  $\mu\text{m}$  quando a altura da ondulação é de 2,0  $\mu\text{m}$ , contra 3,0  $\mu\text{m}$  da condição original do pistão.

Mais uma vez, os maiores deslocamentos observados resultam em maiores velocidades dos pontos Pb e Pt. Ao analisar a Figura 77 abaixo verifica-se que ao reduzir a amplitude de ondulação para 2,0  $\mu\text{m}$ , aumenta-se a velocidade do ponto Pt sensivelmente, durante a fase de expansão. Nesta condição observa-se um aumento de 40% da velocidade  $\dot{e}_t$ , atingindo 2250  $\mu\text{m/s}$ .

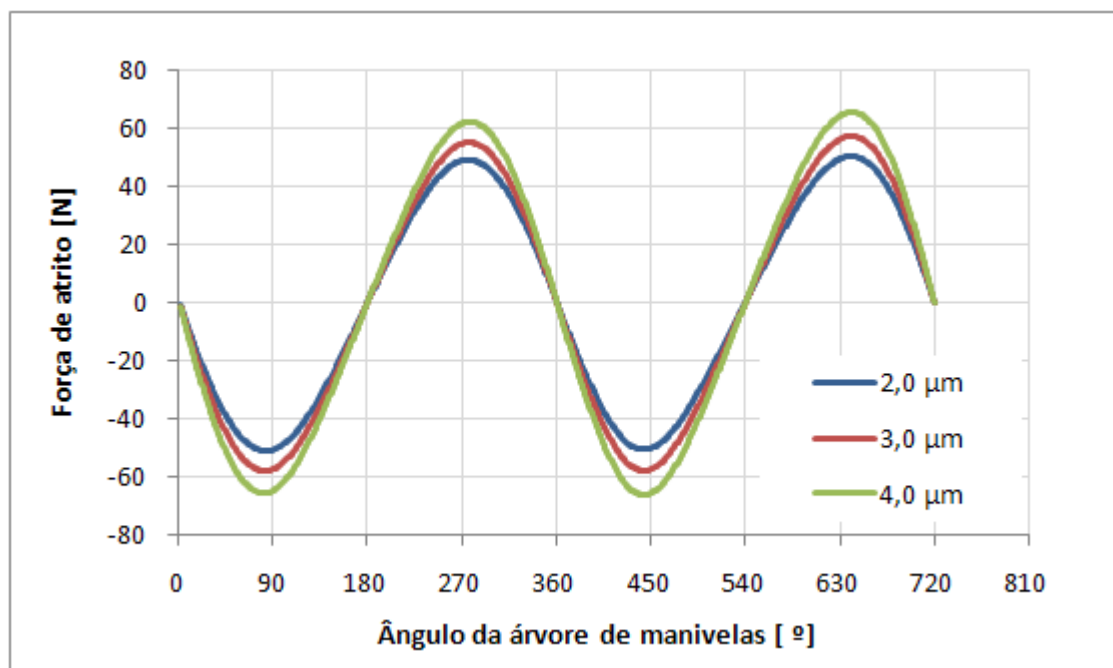


**Figura 77. Gráfico comparativo das velocidades dos pontos Pt e Pb entre sistemas com amplitude de ondulação da sup. da saia de 2,0  $\mu\text{m}$  e de 4,0  $\mu\text{m}$ , com o motor a 2500 rpm**  
Fonte: Elaborado pelo autor

Apesar do aumento das excentricidades  $e_b$  e  $e_t$  ao longo do ciclo, bem como de suas velocidades, a redução da altura das ondulações da superfície da saia do pistão não é considerada como uma alteração de risco, uma vez que o comportamento da dinâmica do pistão é semelhante e ainda existem folgas que impedem o contato com o cilindro ou até mesmo eventuais “batidas” de saia.

Após a análise da dinâmica do pistão e estudo dos deslocamentos e velocidades dos pontos Pb e Pt do pistão, deve-se avaliar o impacto das alterações na força de atrito existente nas saias do pistão. Mais uma vez, vale lembrar que para

os três casos aqui avaliados, não foram evidenciados contato entre o pistão e o cilindro. Portanto, toda parcela da força de atrito é resultado do filme hidrodinâmico existente.



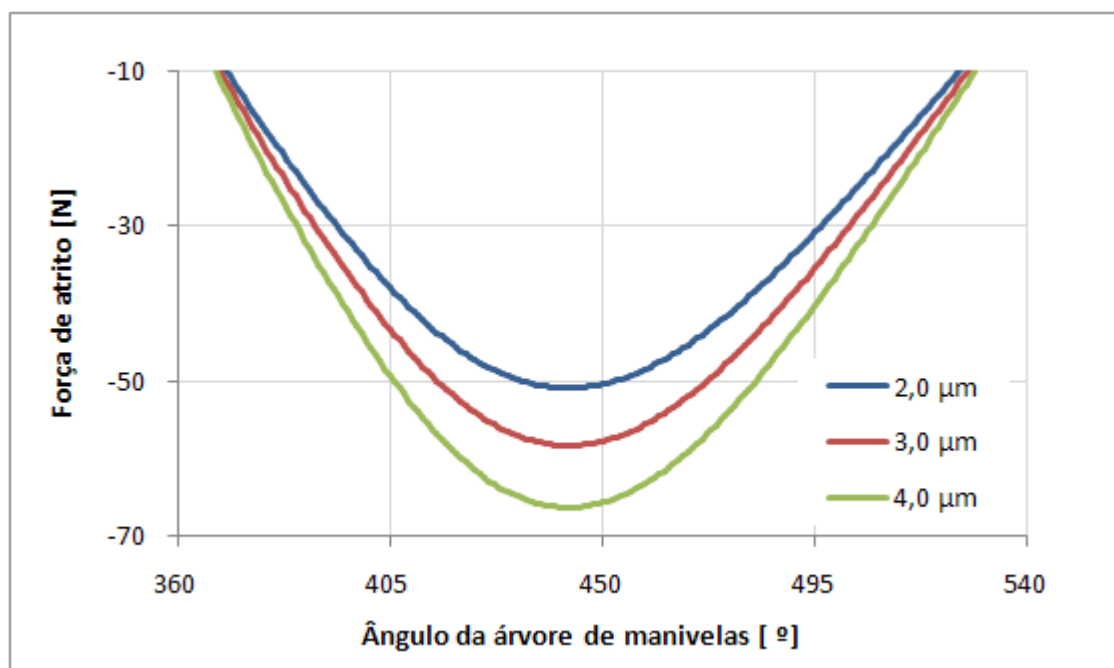
**Figura 78. Gráfico comparativo da força de atrito nas saias do pistão entre sistemas com amplitude de ondulação da superfície da saia de 2,0 µm, de 3,0 µm e de 4,0 µm, com o motor a 2500 rpm**

Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 78 acima apresenta um comparativo das forças de atrito ao longo de um ciclo do motor para as alturas de ondulação de 4,0 µm, 3,0 µm e 2,0 µm. Observa-se que à medida que a altura das ondulações da superfície da saia do pistão é reduzida, reduz-se também a força de atrito. Da mesma forma que na condição original do pistão, linha verde, as outras duas configurações apresentam comportamento semelhante a uma senóide, sendo diretamente proporcional a velocidade do pistão na direção y.

Observa-se, porém, que, ao contrário do evidenciado ao alterar-se o comprimento da biela, aquelas aqui realizadas geram significativa redução da força de atrito independentemente da fase do motor. Ou seja, a redução da altura das ondulações reduz a força de atrito, independentemente das forças aplicadas ao pistão. Conseqüentemente, pode-se concluir que mesmo em cargas mais baixas do motor, onde a força de combustão é menor, também são verificadas reduções significativas da força de atrito.

Para facilitar a visualização, a Figura 79 apresenta, em detalhe, a fase de expansão do motor. Nela, é possível verificar que o valor máximo da força de atrito ocorre quando o ângulo da árvore de manivelas é igual a  $440^\circ$  e a velocidade do pistão na direção y também é máxima.

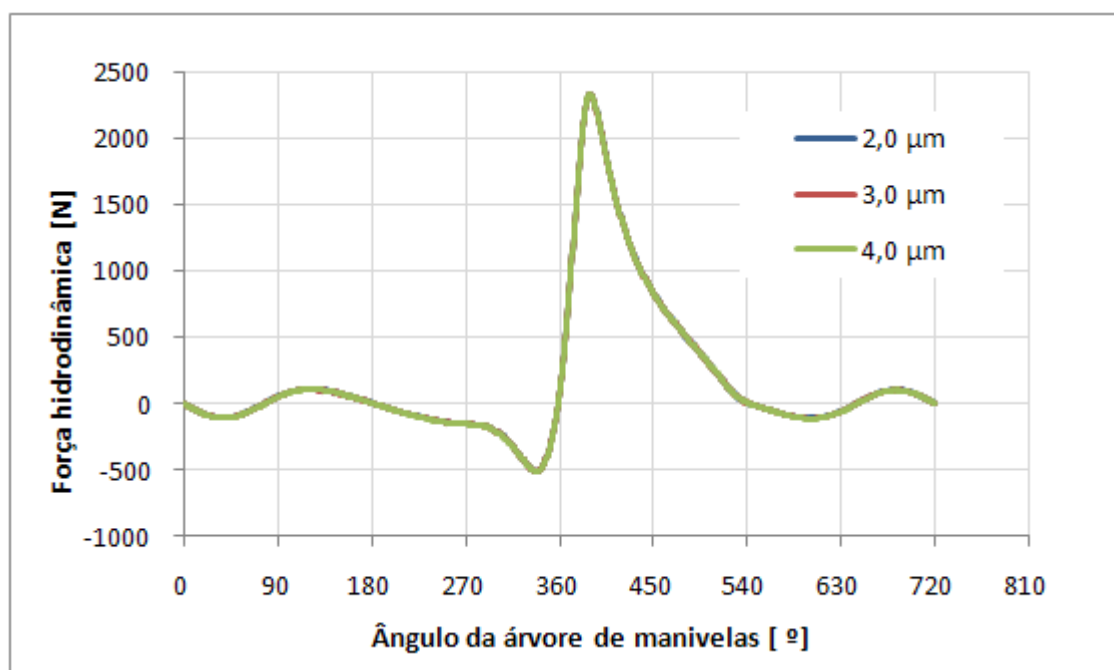


**Figura 79.** Gráfico comparativo da força de atrito nas saias do pistão entre sistemas com amplitude de ondulação da superfície da saia de 2,0 μm, de 3,0 μm e de 4,0 μm, com o motor a 2500 rpm, na fase de expansão do motor

Fonte: Elaborado pelo autor

Observa-se que ao se reduzir a altura das ondulações de 4,0 μm para 3,0 μm, obtém-se uma redução de -66,4 N para -58,4 N, ou seja, 12% de redução do máximo valor absoluto da força de atrito. Já quando se reduz ainda mais a altura das ondulações para 2,0 μm, o ganho com relação ao atrito é ainda maior, atingindo cerca de 23%, chegando-se a 51,3 N.

Finalmente deve ser analisado o comportamento das forças normais à superfície da saia do pistão. Conforme observado na Figura 74 e na Figura 76, a redução da altura das ondulações resultou no aumento das excentricidades  $e_b$  e  $e_t$  ao longo de todo o ciclo do motor. Tal condição resulta na redução da espessura média do filme hidrodinâmico existente. Mesmo assim, conforme apresenta a Figura 80 não são observadas variações na força hidrodinâmica, ao se reduzir a altura das ondulações, e as curvas para os três casos aqui estudados são exatamente as mesmas.



**Figura 80. Gráfico comparativo da força hidrodinâmica aplicada nas saias do pistão entre sistemas com amplitude de ondulação da superfície da saia de 2,0 µm, de 3,0 µm e de 4,0 µm, com o motor a 2500 rpm**

Fonte: Elaborado pelo autor

Uma vez que todas as outras forças aplicadas no pistão, tais como força da combustão e forças reativas da biela, são todas iguais para cada um dos três casos, a força hidrodinâmica deverá conseqüentemente, ser a mesma. No entanto, considerando-se que a força hidrodinâmica é proporcional a altura das ondulações, serão necessárias maiores deslocamentos, ou seja, menores espessuras médias do filme, de modo a resultar na mesma pressão.

Desta forma, conclui-se que a redução da altura das ondulações existentes na saia do pistão pode reduzir significativamente as forças de atrito no pistão. O resultado obtido torna-se ainda mais expressivo devido à simplicidade de alteração. A redução das ondulações pode ser obtida através da alteração dos parâmetros do processo de usinagem, reduzindo o acabamento superficial da superfície, bem como através da aplicação de camada superficial de grafite, ou outro material que reduza as ondulações. Apesar de alterar o custo do produto, as alterações necessárias no pistão não resultam em modificações no projeto de outras peças.

Com relação às forças normais à saia do pistão, bem como aos deslocamentos evidenciados ao longo do ciclo, as alterações se mostraram indiferentes, sem trazer ganhos ou perdas ao conjunto. Não foram evidenciadas

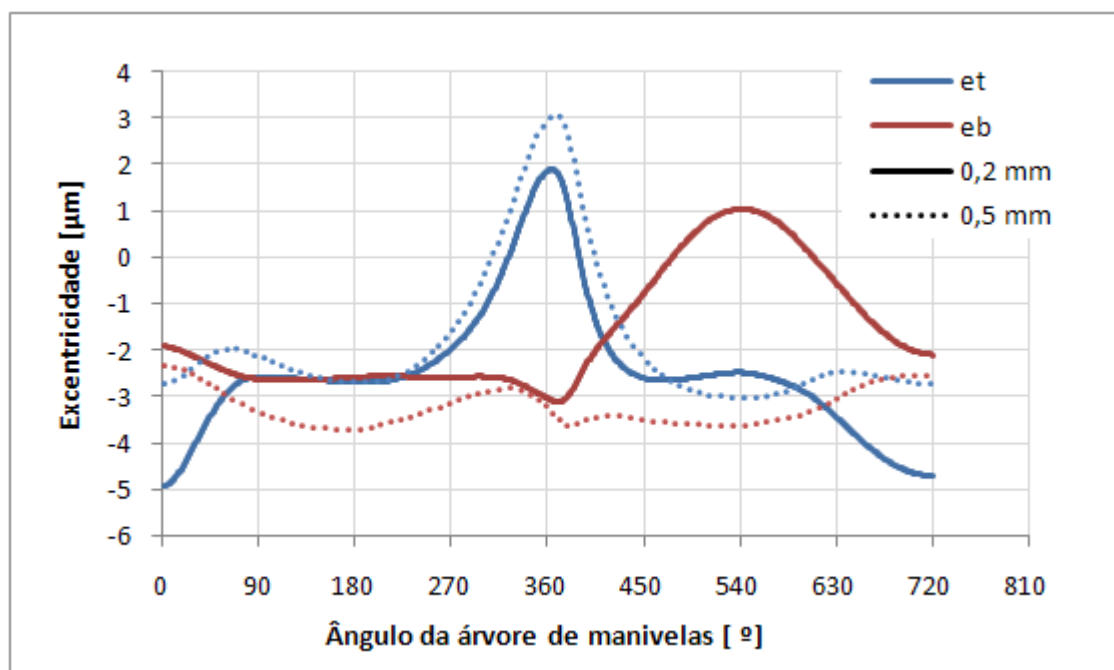


modificações no comportamento do pistão que possam gerar resultados negativos como, por exemplo, “batidas” de pistão.

### 9.2.2.3 Off-set do pino do pistão

Conforme apresentado anteriormente, o pistão aqui estudado possui originalmente, *off-set* de pino de 0,5 mm. Foram, então, estudadas outras duas condições, a primeira reduzindo este valor para 0,2 mm e outra aumentando o *off-set* do pino para 0,8 mm.

De forma análoga ao realizado anteriormente para os outros parâmetros estudados, são inicialmente analisados os efeitos com relação à dinâmica do pistão. Assim, a Figura 81 apresenta o comparativo das excentricidades  $e_b$  e  $e_t$  dos pontos Pb e Pt respectivamente, entre pistões com *off-set* original de 0,5mm e com *off-set* de 0,2 mm, correspondendo à primeira condição de alteração.



**Figura 81. Gráfico comparativo das excentricidades  $e_t$  e  $e_b$  entre sistemas com *off-set* de pino de 0,2 mm e 0,5 mm, com o motor a 2500 rpm**

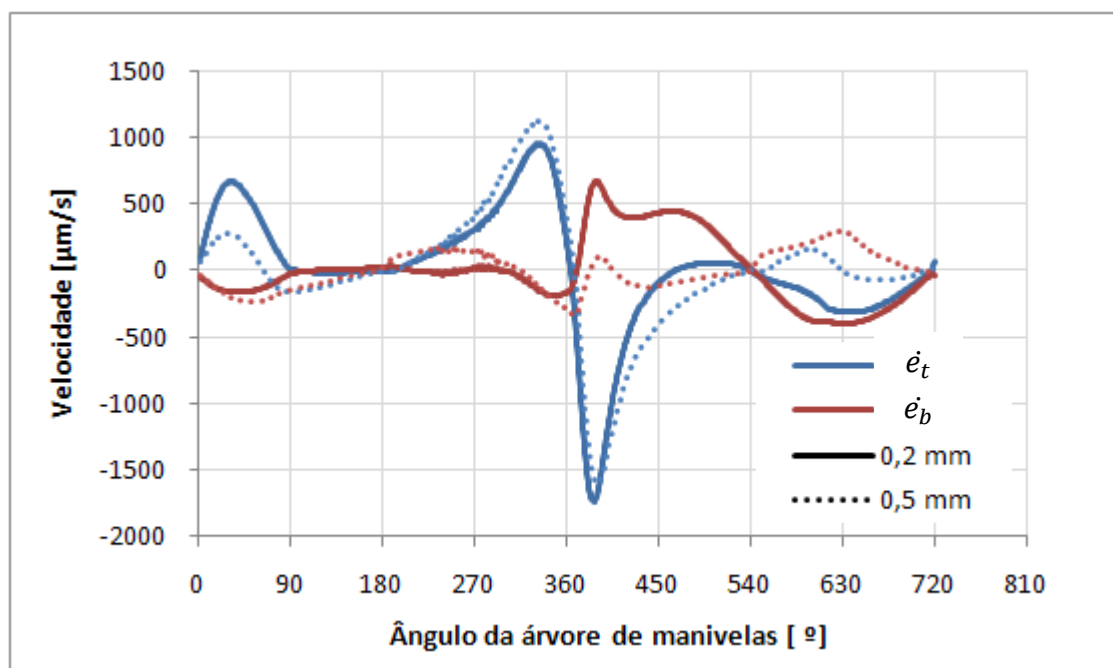
Fonte: Elaborado pelo autor

Ao analisar o gráfico acima, verifica-se que a alteração do *off-set* do pino do pistão possui forte influência na dinâmica lateral do pistão, variando consideravelmente a movimentação dos pontos Pb e Pt ao longo do ciclo do motor. Conforme analisado anteriormente, ao modificar tal característica do motor, altera-se o ponto de articulação do pistão. Como consequência, alguns dos momentos

aplicados no pistão tem sua magnitude alterada, modificando o comportamento dinâmico do pistão dentro do cilindro.

Durante as fases de expansão e exaustão do motor, entre  $360^\circ$  e  $720^\circ$  da árvore de manivelas, a excentricidade  $e_b$  sofre forte alteração. Enquanto que na configuração inicial, o ponto Pb permanece deslocado em torno de  $-3,5 \mu\text{m}$ , com o novo *off-set* de  $0,2 \text{ mm}$ , o deslocamento de Pb atinge valor máximo de  $1 \mu\text{m}$ . Como consequência o ângulo  $\eta$  do pistão, durante este período, atinge também valores maiores.

Analisando ainda o gráfico das excentricidades  $e_b$  e  $e_t$ , nota-se também forte modificação do deslocamento de Pt no término da fase de exaustão e início da admissão do motor. Embora não tenham sido evidenciadas condições de contato entre o pistão e o cilindro do motor, durante tais instantes, a excentricidade  $e_t$  atingiu valor absoluto máximo de  $4,8 \mu\text{m}$  enquanto que na condição inicial no mesmo período o deslocamento foi de apenas  $2,7 \mu\text{m}$ .



**Figura 82.** Gráfico comparativo das velocidades dos pontos Pt e Pb entre sistemas com *off-set* de pino de  $0,2 \text{ mm}$  e  $0,5 \text{ mm}$  com o motor a  $2500 \text{ rpm}$

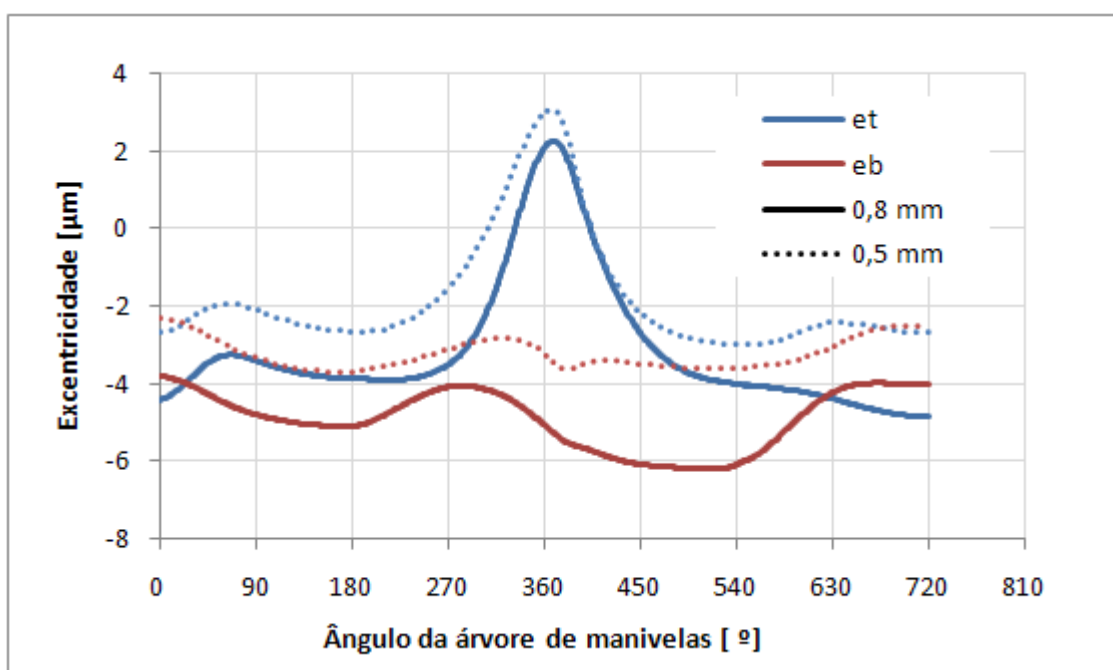
Fonte: Elaborado pelo autor

Este comportamento diferenciado das excentricidades, devido à alteração do *off-set* do pino do pistão, também é evidenciado nas velocidades  $\dot{e}_b$  e  $\dot{e}_t$ . Conforme o gráfico da Figura 82 apresenta, as maiores excentricidades do ponto Pb, durante a fase de expansão, resultam em maiores velocidades no mesmo período. Assim, o

máximo valor de  $\dot{e}_b$  atinge 665  $\mu\text{m/s}$ , enquanto que anteriormente este valor atingia cerca de 100  $\mu\text{m/s}$ .

Um aumento da velocidade  $\dot{e}_t$  também ocorre no início da fase de admissão. Com o *off-set* alterado para 0,2 mm, obtém-se também velocidade da ordem de 650  $\mu\text{m/s}$ , contra 250  $\mu\text{m/s}$  quando com *off-set* de 0,5 mm. Tal comportamento é resultante do aumento da rotação do pistão ao longo do ciclo, devido à alteração do ponto de articulação.

Já os deslocamentos de  $P_b$  e  $P_t$  obtidos para o segundo caso, onde o *off-set* é de 0,8 mm, embora sejam também diferentes dos deslocamentos na configuração original, não indicam grandes rotações do pistão ao longo do ciclo. Em contra partida, verifica-se, na fase de expansão do motor, condições de contato entre o pistão e o cilindro do motor, uma vez que a excentricidade  $e_b$  ultrapassa 6  $\mu\text{m}$ .



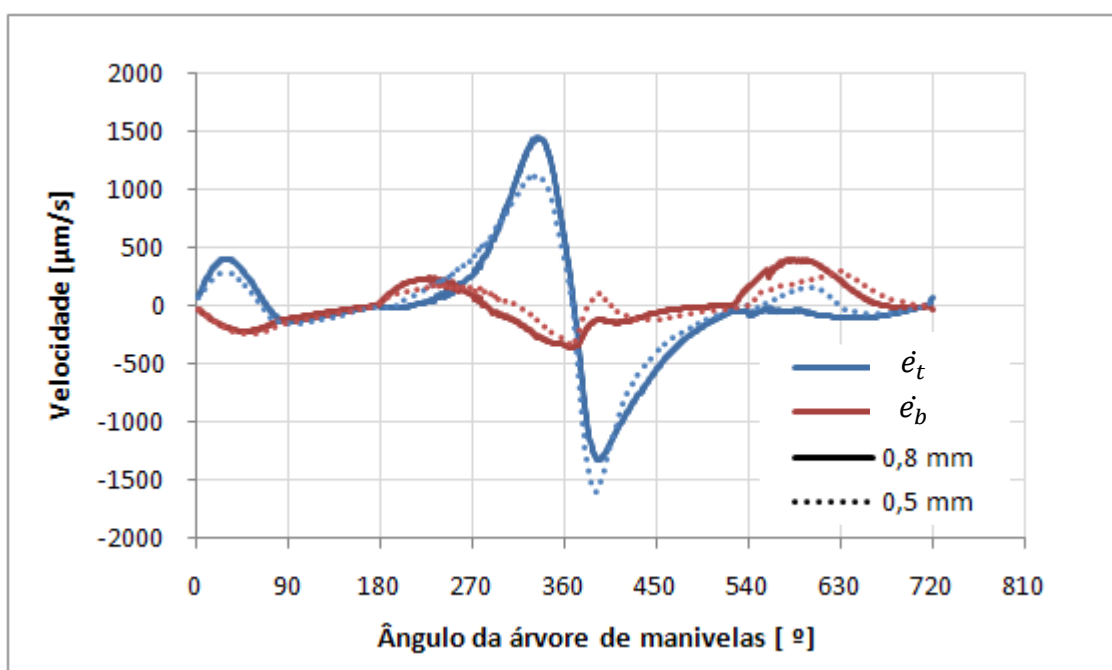
**Figura 83. Gráfico comparativo das excentricidades  $e_t$  e  $e_b$  entre sistemas com *off-set* de pino de 0,8 mm e 0,5 mm, com o motor a 2500 rpm**

Fonte: Elaborado pelo autor

De um modo geral, observa-se que os valores médios das excentricidades  $e_b$  e  $e_t$  ao longo do ciclo do motor são maiores cerca de 1,5  $\mu\text{m}$ . Por este motivo, o pistão com o *off-set* de 0,8 mm permanece mais deslocado da posição central do cilindro, reduzindo a folga existente no lado de pressão do pistão.

Especificamente na fase de expansão do motor, o deslocamento do ponto Pb atinge valor absoluto máximo de 6,2  $\mu\text{m}$ . Como a folga é de 10,0  $\mu\text{m}$  e as ondulações da saia de 4,0  $\mu\text{m}$ , observa-se neste período o contato entre o pistão e o cilindro do motor. Uma vez que o *off-set* do pino do pistão aumenta, aumenta também o momento gerado pela força da combustão aplicada ao topo do pistão. Como consequência, o pistão apresenta maior rotação durante esta fase, entrando em contato com o cilindro.

Com relação às velocidades  $\dot{e}_b$  e  $\dot{e}_t$ , não são evidenciadas grandes variações, visto que os deslocamentos de ambas as configurações possuem comportamentos semelhantes. Como pode ser observado na Figura 84 abaixo, durante a fase de compressão, a velocidade  $\dot{e}_t$  atinge maior valor máximo, com aumento de cerca de 30%.



**Figura 84. Gráfico comparativo das velocidades dos pontos Pt e Pb entre sistemas com *off-set* de pino de 0,8 mm e 0,5 mm, com o motor a 2500 rpm**

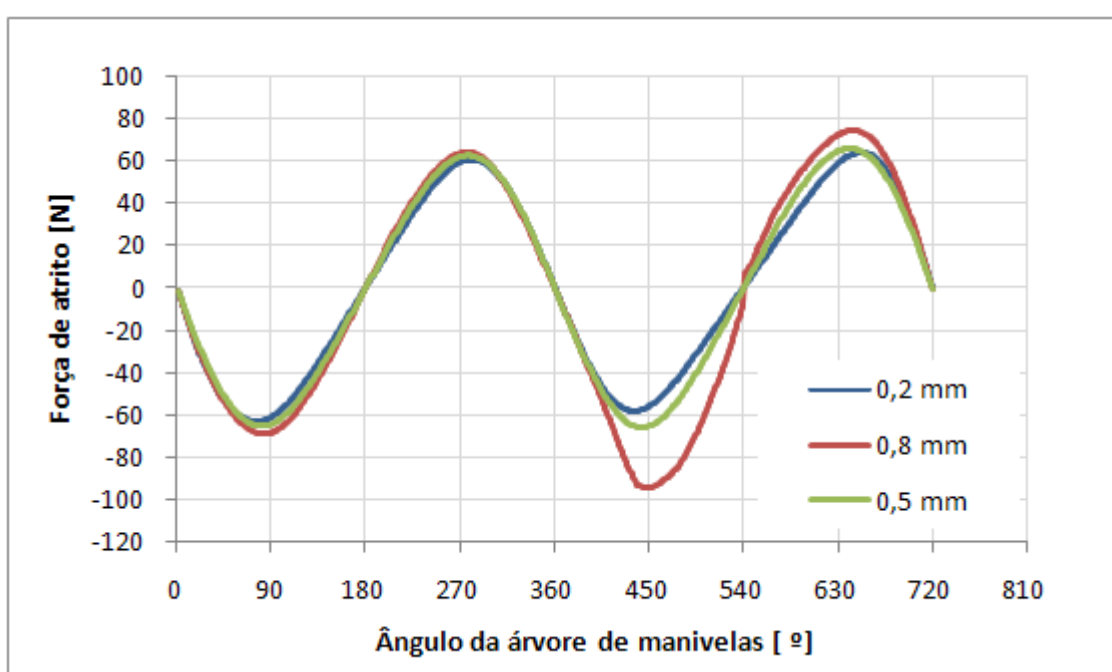
Fonte: Elaborado pelo autor

Já no início da fase de exaustão, em torno de 550° da árvore de manivelas, verifica-se que a velocidade do ponto Pb aumenta rapidamente. Este comportamento ocorre devido ao contato entre o pistão e o cilindro que ocorre no fim da fase de expansão.

Após a análise da dinâmica dos pontos Pb e Pt, deve-se então avaliar o comportamento das forças de atrito em cada um dos casos, ao longo do ciclo do

motor. Assim como evidenciado na análise realizada acerca do comprimento de biela, verifica-se aqui que a força de atrito existente entre a saia do pistão e o cilindro do motor sofre pequena, ou nenhuma, alteração durante as fases de admissão e compressão do motor.

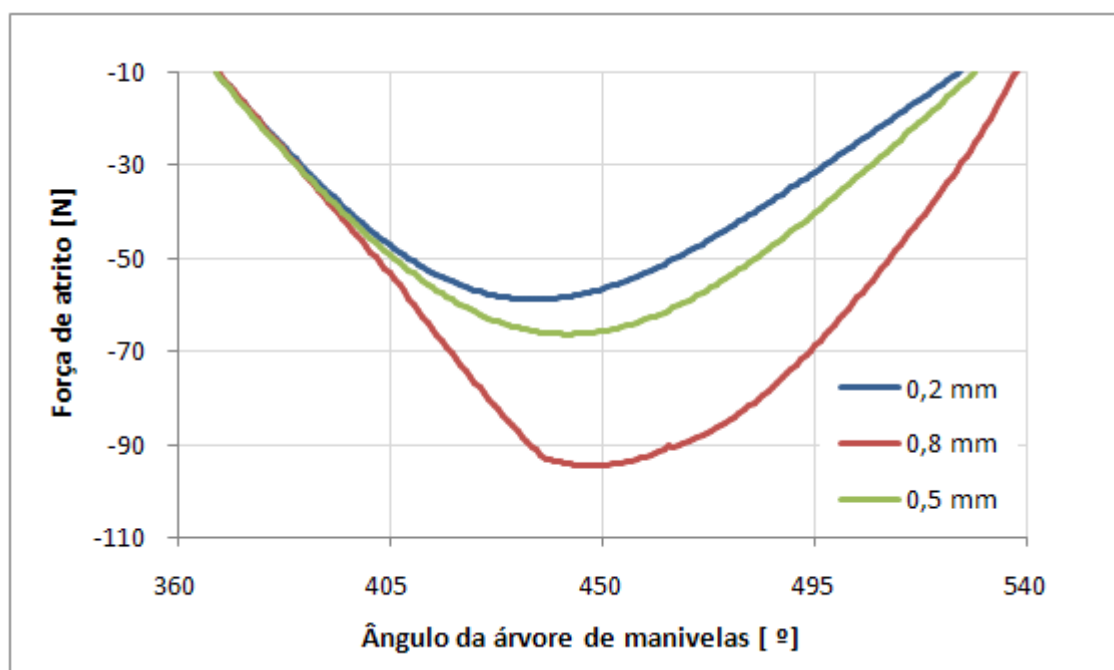
Conforme apresenta a Figura 85, diferenças significativas ocorrem a partir da fase de expansão do motor. Os casos de *off-set* iguais a 0,2 mm e 0,5 mm, onde não ocorreu contato entre o pistão e o cilindro, a força de atrito é sempre toda proveniente do filme hidrodinâmico. Já no último caso analisado, durante a fase onde ocorre o contato evidenciado, parte da força de atrito é do tipo Coulombiano.



**Figura 85.** Gráfico comparativo da força de atrito nas saias do pistão entre sistemas com *off-set* de pino de 0,2 mm, 0,5 mm e 0,8 mm, com o motor a 2500 rpm

Fonte: Elaborado pelo autor

De modo a facilitar a visualização, a Figura 86 apresenta o detalhe da fase de expansão do motor, entre 360° e 540°, onde os maiores valores da força de atrito ocorrem. No primeiro caso analisado, com o *off-set* reduzido para 0,2 mm, obteve-se uma pequena redução no valor máximo da força de atrito, da ordem de 4%. Tal redução se deve às maiores espessuras do filme de óleo lubrificante durante esta fase, reduzindo a restrição ao movimento do pistão.



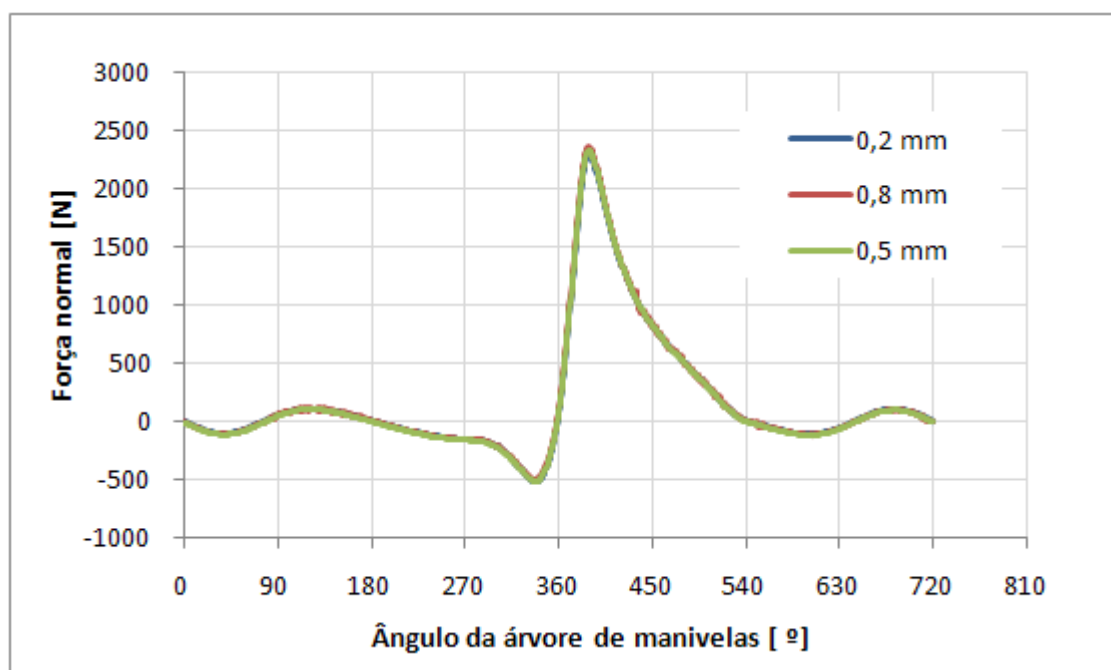
**Figura 86. Gráfico comparativo da força de atrito nas saias do pistão entre sistemas com off-set de pino de 0,2 mm, 0,5 mm e 0,8 mm, com o motor a 2500 rpm, na fase de expansão**

Fonte: Elaborado pelo autor

Em contrapartida, no segundo caso analisado, observa-se um forte aumento da força de atrito existente. Este aumento se deve a dois fatores. O primeiro deles está relacionado ao filme de óleo lubrificante que, durante a fase de expansão, é menor para o caso de 0,8 mm.

Já o segundo e principal fator é a existência do contato entre o pistão e o cilindro a partir de 440° da árvore de manivelas. A partir deste instante a força de atrito possui uma parcela de atrito hidrodinâmico e outra de atrito de contato. Assim, a força de atrito resultante possui elevado valor, atingindo valor absoluto máximo de 96 N, o que corresponde a um aumento de 30%.

Finalmente é analisado o comportamento das forças normais à saia do pistão. Conforme apresenta a Figura 87 a seguir, não ocorrem variações significativas das forças ao longo do ciclo do motor, independentemente do *off-set* aplicado. Especificamente no caso de *off-set* de 0,8 mm, mesmo com a existência de contato entre o pistão e o cilindro, a força normal à saia permanece inalterada. Nota-se um pequeno aumento no seu valor máximo, quando a árvore de manivelas está em torno de 390°. Mesmo assim esta variação é menor que 1%.



**Figura 87. Gráfico comparativo da força hidrodinâmica aplicada nas saias do pistão entre sistemas com *off-set* de pino de 0,2 mm, 0,5 mm e 0,8 mm, com o motor a 2500 rpm**

Fonte: Elaborado pelo autor

A partir das análises aqui realizadas, conclui-se que o *off-set* do pino do pistão é um parâmetro que deve ser explorado considerando um bom compromisso entre esforços e equilíbrio do pistão. Verifica-se que não existe uma tendência clara para redução do atrito ou das forças envolvidas. No entanto, pode-se, através do *off-set*, minimizar condições onde ocorram contato entre o pistão e o cilindro reduzindo assim as forças de atrito.

Com relação ao conjunto estudado, verifica-se que o aumento do *off-set* resulta no contato do pistão com o cilindro aumentando consideravelmente as forças de atrito. Em contra partida, ao reduzir o valor do *off-set* observou-se pequena redução da força de atrito e aumento da rotação do pistão ao longo do ciclo.

Assim, considera-se que o valor utilizado originalmente de 0,5 mm, como uma boa solução de compromisso. Embora nesta condição de operação do motor redução das forças fosse evidenciada, o aumento da tendência de rotação também verificada pode indicar que outras condições aqui não estudadas gerem o contato do pistão com o cilindro contribuindo para o aumento das forças de atrito.

## 10 CONCLUSÕES

O presente trabalho realizou um estudo das forças de atrito existentes entre as saias do pistão e o cilindro do motor, bem como da dinâmica lateral do pistão e dos esforços a ele aplicados. A utilização de um modelo matemático permitiu realização de análise paramétrica, com resultados confiáveis e em curto espaço de tempo.

O modelo matemático desenvolvido por Zhu et. al (1992) foi estudado e implementado neste trabalho. Por considerar a saia do pistão em regime de lubrificação elastohidrodinâmica, os efeitos do filme hidrodinâmico, assim como os efeitos de eventuais contatos com o cilindro do motor, são considerados nos cálculos. Adicionalmente também foram consideradas as características do acabamento superficial da saia, as quais possuem forte influência nos resultados.

Desenvolveu-se, então, um modelo numérico baseado no modelo matemático proposto. Rotinas de cálculo foram criadas através de métodos numéricos específicos para a determinação das forças excitantes e, principalmente, para a solução do sistema de equações diferenciais do movimento do conjunto.

O modelo matemático implementado foi também empregado por outros autores como Liu (1998), Mansouri (2004), Balakrishnan (2004) e Meng (2006), e pode ser considerado como um sistema consolidado nesta área de estudo. Diante da confiabilidade do modelo proposto, uma possível etapa de validação experimental dos resultados obtidos não se fez necessária. Como consequência o desenvolvimento aqui realizado não acarretou em custos adicionais com construções de protótipos e utilização de bancos de ensaio.

Como forma de validação do modelo implementado, os resultados foram confrontados com aqueles obtidos por Zhu et. al (1992). Duas condições de simulação foram avaliadas. A primeira, simulando condição de freio motor, onde este gira sem a queima de combustível; a segunda, simulando o funcionamento normal do motor, com a presença de combustão. A grande semelhança dos resultados demonstraram a correta implementação numérica do modelo, dando fidedignidade às análises realizadas.



Assim, um dos resultados de destaque deste trabalho é a construção de um simulador validado para a predição da trajetória do pistão dentro do cilindro do motor. Tal simulador pode ser utilizado no projeto e desenvolvimento de motores, auxiliando na determinação das forças de atrito hidrodinâmico e de contato, bem como das forças normais aplicadas à saia do pistão.

A análise paramétrica desenvolvida possibilitou o estudo de três parâmetros do conjunto pistão, biela e árvore de manivelas. As simulações numéricas realizadas indicam diferentes comportamentos devidos à sua variação.

O primeiro parâmetro analisado foi o comprimento da biela, ou seja, a variação da relação " $l/r$ ". Assim como verificado nos estudos realizados por Adachi et al. (1998) e Wakabayashi et. al (2003), o aumento da relação " $l/r$ " implica na redução da força de atrito entre a saia do pistão e o cilindro do motor. Especificamente nos casos estudados observou-se redução de até 9% do valor máximo da força de atrito.

Entretanto, a variação do comprimento da biela não implica somente em ganhos com relação às forças de atrito. Ao comparar os dois extremos avaliados, uma redução de 11% da força normal aplicada à saia do pistão também foi evidenciada. Esta redução pode possibilitar a construção de pistões mais esbeltos, de menor massa, reduzindo o peso total do motor, ou até mesmo a alteração de seu material, com utilização de ligas menos nobres, reduzindo-se também o seu custo de fabricação.

Como esperado, no que tange à influência das ondulações existentes na saia do pistão, segundo parâmetro avaliado, conclui-se que a redução de sua amplitude resulta na redução do atrito existente. Ao reduzir as ondulações de 4,0  $\mu\text{m}$  para 2,0  $\mu\text{m}$ , foi alcançada redução de 23% do máximo valor da força de atrito aplicada à saia do pistão.

Uma vez que a redução das ondulações pode ser facilmente alcançada através da aplicação de camada de grafite nas saias do pistão, os ganhos obtidos se tornam ainda mais expressivos. No entanto, deve-se tomar cuidado com as implicações desta ação no que tange à capacidade de manter o filme de óleo entre o pistão e o cilindro. Como consequência, fortes condições de contato seriam evidenciadas, aumentando significativamente as forças de atrito envolvidas.

Já o terceiro e último parâmetro estudado foi o *off-set* do pino do pistão. De acordo com as simulações numéricas realizadas, este parâmetro deve ser definido de forma a atender o compromisso de manutenção do filme hidrodinâmico. Conclui-se dos resultados de simulação que o *off-set* do pino tem forte influência na dinâmica e no balanceamento do pistão. A definição incorreta deste parâmetro confere maior tendência à rotação ao conjunto, aumentando o contato com o cilindro do motor.

Especificamente para o motor de estudo deste trabalho, não foram evidenciadas condições que justifiquem a modificação do parâmetro. Ao aumentar ou diminuir o valor do *off-set* observou-se aumento da tendência à rotação do pistão, bem como de contato com o cilindro motor.

De um modo geral, os estudos realizados neste trabalho indicam que parâmetros tais como folga de montagem, velocidade do pistão, força de combustão, propriedades do lubrificante e características geométricas do pistão possuem forte impacto na determinação de sua dinâmica lateral e das forças de atrito. Boas condições de lubrificação hidrodinâmica podem minimizar as possibilidades de impactos e contato com o cilindro do motor, reduzindo as forças restritivas ao movimento.

Com relação a futuros trabalhos, sob a ótica de avaliação da influência dos parâmetros do conjunto no consumo de combustível, propõe-se desenvolver continuação do modelo matemático para o cálculo do momento no eixo do motor, considerando a força proveniente da combustão, as forças de atrito entre o pistão e o cilindro, e a força resultante na biela. Adicionalmente deve-se estender o resultado obtido, de um único cilindro, para os outros três cilindros do motor, ordenando-os em função da ignição.

Desta maneira, seria possível avaliar o efeito das variações encontradas com relação às forças de atrito nas saias do pistão, bem como às forças normais, no torque sobre o eixo do motor. Conseqüentemente, as simulações numéricas trariam resultados mais diretamente aplicáveis ao consumo de combustível.

Por outro lado, o modelo implementado não toma em conta a interação da dinâmica do filme lubrificante com a dinâmica lateral do pistão, propriamente dito. Ou seja, não modela a destruição e reconstituição do filme quando do contato seco. Tal análise poderia ser vista como possibilidade futura de pesquisa.

Outro possível campo para futuros estudos seria a redução da capacidade de processamento necessária para realizar as simulações. Conforme avaliado anteriormente, o método numérico aplicado implica na necessidade de pequenos intervalos de simulação, aumentando o tempo total do processamento. Desenvolver uma modificação no método numérico aplicado a qual possibilitasse trabalhar com intervalos maiores implicaria na obtenção de resultados de maneira ainda mais rápida.

O uso de linguagem compilada, como o C++, levaria à redução sensível do tempo de processamento. Se necessário, o uso de métodos de processamento paralelo poderia também ser aventado.

Enfim, o pressuposto inicial no qual se apóia este trabalho mostrou-se verdadeiro, ou seja, alterações de parâmetros do conjunto pistão, biela e árvore de manivelas podem resultar na redução das perdas por atrito do motor com conseqüente redução do consumo de combustível. Trata-se, no entanto, de um vasto campo de estudo a ser ainda mais explorado.

Os resultados aqui obtidos, assim como o modelo implementado, estão, sem dúvida, alinhados com as necessidades da indústria automotiva. É necessário, no entanto, saber explorá-los de maneira a permitir alcançar benefícios efetivos.

## 11 REFERÊNCIAS

ADACHI, S. et. al. Development of Toyota 1ZZ-FE Engine. **SAE International: Technical Paper Series**, n. 981087, p. 11, 1998.

ANDRADE, E. L. **Introdução à Pesquisa Operacional: Métodos e Modelos para Análise de Decisões**. 3. ed. São Paulo: Livros Técnicos e Científicos Editora, 2007.

ANFAVEA. **Relatório de produção de autoveículos por tipo e combustível** Disponível em: <<http://www.anfavea.com.br/tabelas.html>>. Acesso em: 30 de março de 2004.

BALAKRISHNAN, S.; RAHNEJAT, H. Isothermal transient analysis of piston skirt-to-cylinder wall contacts under combined axial, lateral and tilting motion. **IOP: Journal of Physics D.**, v. 38, p. 787-799, 2005.

BARROS, IVAN DE QUEIROZ. **Equações Diferenciais Parciais: Método das diferenças finitas**. 2ª ed. São Paulo: Instituto de matemática e estatística da USP, 1985, 248 p.

BATCHELOR, G. K. **An Introduction to Fluid Dynamics**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 615 p.

BOWDEN, F. P., TABOR D. **The Friction and Lubrication of Solids**. 5. ed. Nova Iorque: Oxford University Press, 2001. 374 p.

BRAGA, B. et al. **Introdução à Engenharia Ambiental: o desafio do desenvolvimento sustentável**. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2005.

BURDEN, R.; FAIRES, J. D. **Numerical Analysis**. 7 ed. Nova Iorque: Brooks Cole, 2000. 864 p.

CHRISTENSEN H., TONDER K. The Hydrodynamic Lubrication of Rough Journal Bearings. **ASME: Journal of Lubrication Technology**, v. 95, p. 166-171, Abr 1973.

CHRISTENSEN H., TONDER K. The Hydrodynamic Lubrication of Rough Bearing Surfaces of Finite Width. **ASME: Journal of Lubrication Technology**, v. 93, p. 324-329, Abr 1973.

FRENE, J. et. al. **Hydrodynamic Lubrication: Bearings and Thrust Bearings**. Nova Iorque: Elsevier, 1997. 470 p.

GARCIA, O.; BRUNETTI, F. **Motores de combustão interna**. 2 ed. São Paulo, SP: 1992. 367 p.

HEYWOOD, J. B. **Internal Combustion Engine Fundamentals**. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1988. 930 p.

HILDEBRAND, FRANCIS B. **Advanced Calculus for Applications**. 2ª ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1976, 733p.

HUANG, X. B. **Hydrodynamic Lubrication Under Severe Conditions**. Northwestern University – Evanston, Illinois, 1990 – Tese para obtenção do título de Ph. D. em Ciências

JOHNSON, K. L. **Contact Mechanics**. 9ª ed. Cambridge, CB: Cambridge University Press, 1985. 452 p.

JUNG, C. F. **Metodologia para pesquisa & desenvolvimento: aplicada a novas tecnologias, produtos e processos**. Rio de Janeiro: Axcel Editora, 2004.

LEONG, D. K. W. et. al. Characterizing the effect of viscosity on friction in the piston assembly of internal combustion engines. **Journal of Engineering Tribology**, v. 221, p. 469-478, 2007.

LIMA, H. As críticas de Fidel são improcedentes. **O Globo**, Rio de Janeiro, 3 de maio de 2007. Caderno Opinião. p. 7.

LIU, K.; XIE B. Y.; GUI, C. L. A comprehensive study of the friction and dynamic motion of the piston assembly. **Proc Instn Mech Engrs**, v. 212, p. 221-226, 1998.

LIVANOS, G. A.; KYRTATOS, N. P. Friction model of a marine diesel engine piston assembly. **Tribology International**, v. 40, p. 1441-1453, 2007.

MANSOURI, S. H., WONG, V. W. Effects of piston design parameters on piston secondary motion and skirt-liner friction. **Journal of Engineering Tribology**, v. 219, p. 435-449, 2005.

MENG, F. M. et. al. Thermo-elasto-hydrodynamic lubrication analysis of piston skirt considering oil film inertia effect. **Tribology International**, v. 40, p. 1089-1099, 2007.

MUFTI, R. A.; PRIEST, M. Experimental Evaluation of Piston-Assembly Friction Under Motored and Fired Conditions in a Gasoline Engine. **ASME: Journal of Tribology**, v. 127, p. 826-836, Out 2005.

PATIR, N.; CHENG, H. S. An Average Flow Model for Determining Effects of Three-Dimensional Roughness on Partial Hydrodynamic Lubrication. **ASME: Journal of Lubrication Technology**, v. 100, p. 12-17 Jan 1978.

PRESS, WILLIAM H. et al. **Numerical Recipes in C: The art of Scientific Computing**. 2ª ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1992, 994p.

PRESS, WILLIAM H. et al. **Numerical Recipes: Example Book [C]**. 2ª ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1992, 325p.

SALERNO, M. S. A indústria automobilística na virada do século. In: ARBIX, G; ZILBOVICIUS, M. (Org.). **De JK a FHC: a reinvenção dos carros**. São Paulo: Scritta, 1997. p. 503-519.

SANTANA, ALESSANDRO ALVES **Programas em MATLAB para Implementação de Exemplos em Discretização de Equações Diferenciais Parciais**. USP – São Carlos, 1998 – Dissertação para obtenção do título de Mestre em Ciências – área de ciências da computação e matemática computacional. 172p.

TAYLOR, C. F. **Análise dos motores de combustão interna**. São Paulo: Edgar Blücher, 1971. v. 1, 558 p.

TAYLOR, C. F. **Análise dos motores de combustão interna**. São Paulo: Edgar Blücher, 1976. v. 2, 531 p.

WAKABAYASHI, R. et. al. The Effects of Crank Ratio and Crankshaft Offset on Piston Friction Losses. **SAE International: Technical Paper Series**, n. 010983, p. 21-27, 2003.

ZHU, D. et al. A Numerical Analysis for Piston Skirts in Mixed Lubrication – Part I: Basic Modeling. **Journal of Tribology**, v. 114, p. 553-562, Jul 1992.

ZHU, D. et al. A Numerical Analysis for Piston Skirts in Mixed Lubrication – Part II: Deformation Considerations. **Journal of Tribology**, v. 115, p. 125-133, Jan 1993.

## APÊNDICE A – Método numérico para cálculo da pressão hidrodinâmica

### A.1 Implementação do método numérico

A equação que modela a pressão hidrodinâmica entre o pistão e o cilindro não possui resolução analítica geral e deve, portanto, ser determinada numericamente. Utilizou-se o método SOR, que é um método numérico de relaxação por diferenças finitas para problemas de valor de contorno. As etapas associadas à implementação deste método são apresentadas a seguir.

Conforme visto anteriormente, a equação diferencial parcial da pressão hidrodinâmica definida pela equação (62) pode ser reescrita na forma:

$$\alpha(x, y) \frac{\partial^2 p_h}{\partial x^2} + \beta(x, y) \frac{\partial p_h}{\partial x} + \gamma(x, y) \frac{\partial^2 p_h}{\partial y^2} + \delta(x, y) \frac{\partial p_h}{\partial y} = \varepsilon(x, y) \quad (133)$$

Ainda, pelo método das diferenças finitas, as derivadas parciais que compõem a equação acima devem ser substituídas por aproximações, o que pode ser feito na forma:

$$\frac{\partial p_h}{\partial x} = \frac{p_{j,i+1} - p_{j,i-1}}{2\Delta x} \quad (134)$$

e:

$$\frac{\partial p_h}{\partial y} = \frac{p_{j+1,i} - p_{j-1,i}}{2\Delta y} \quad (135)$$

Assim como:

$$\frac{\partial^2 p_h}{\partial x^2} = \frac{p_{j,i+1} - 2p_{j,i} + p_{j,i-1}}{\Delta x^2} \quad (136)$$

e:

$$\frac{\partial^2 p_h}{\partial y^2} = \frac{p_{j+1,i} - 2p_{j,i} + p_{j-1,i}}{\Delta y^2} \quad (137)$$

A equação diferencial parcial é então reescrita de forma discreta:

$$\begin{aligned} \alpha(x, y) \left( \frac{p_{j,i+1} - 2p_{j,i} + p_{j,i-1}}{\Delta x^2} \right) + \beta(x, y) \left( \frac{p_{j,i+1} - p_{j,i-1}}{2\Delta x} \right) \\ + \gamma(x, y) \left( \frac{p_{j+1,i} - 2p_{j,i} + p_{j-1,i}}{\Delta y^2} \right) + \delta(x, y) \left( \frac{p_{j+1,i} - p_{j-1,i}}{2\Delta y} \right) \\ = \varepsilon(x, y) \end{aligned} \quad (138)$$

As variáveis discretas de pressão hidrodinâmica são colocadas em evidência, de modo a facilitar a implementação numérica a seguir. Assim:

$$\begin{aligned} p_{j,i+1} \left( \frac{a(x, y)}{\Delta x^2} + \frac{b(x, y)}{2\Delta x} \right) + p_{j,i-1} \left( \frac{a(x, y)}{\Delta x^2} - \frac{b(x, y)}{2\Delta x} \right) \\ + p_{j+1,i} \left( \frac{c(x, y)}{\Delta y^2} + \frac{d(x, y)}{2\Delta y} \right) + p_{j-1,i} \left( \frac{c(x, y)}{\Delta y^2} - \frac{d(x, y)}{2\Delta y} \right) \\ + p_{j,i} \left( -\frac{2c(x, y)}{\Delta y^2} - \frac{2a(x, y)}{\Delta x^2} \right) = e(x, y) \end{aligned} \quad (139)$$

Finalmente, termos são ordenados e a equação (63) é reescrita:

$$u_{j,i+1}TA(x, y) + u_{j,i-1}TB(x, y) + u_{j+1,i}TC(x, y) + u_{j-1,i}TD(x, y) + u_{j,i}TE(x, y) = e(x, y) \quad (140)$$

com:

$$TA(x, y) = \frac{a(x, y)}{\Delta x^2} + \frac{b(x, y)}{2\Delta x} \quad (141)$$

$$TB(x, y) = \frac{a(x, y)}{\Delta x^2} - \frac{b(x, y)}{2\Delta x} \quad (142)$$

$$TC(x, y) = \frac{c(x, y)}{\Delta y^2} + \frac{d(x, y)}{2\Delta y} \quad (143)$$

$$TD(x, y) = \frac{c(x, y)}{\Delta y^2} - \frac{d(x, y)}{2\Delta y} \quad (144)$$

$$TE(x, y) = -\frac{2c(x, y)}{\Delta y^2} - \frac{2a(x, y)}{\Delta x^2} \quad (145)$$



Como a equação (133) e, por conseguinte, sua forma discreta (140) são lineares, constrói-se, assim, um sistema de equações lineares. Cada equação rege a pressão hidrodinâmica em um dos pontos. O sistema de equações é apresentado na forma matricial:

$$\mathbf{AP} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{bp} \quad (146)$$

onde:

$\mathbf{AP}$  = Matriz dos termos dependentes de  $p_{j,i}$ ;

$\mathbf{p}$  = Vetor das pressões  $p_{j,i}$  que definem a resolução da malha;

$\mathbf{bp}$  = Vetor dos termos independentes de  $p_{j,i}$ .

Como exemplo da implementação da equação (140), toma-se o ponto de pressão  $p_{2,2}$ . Os valores de  $x$  e  $y$  para este ponto são calculados a partir de:

$$x = x_0 + i\Delta x \quad (147)$$

e:

$$y = y_0 + j\Delta y \quad (148)$$

onde:

$x_0$  = Valor de  $x$  na fronteira inicial da malha;

$y_0$  = Valor de  $y$  na fronteira inicial da malha.

Assim:

$$x = x_0 + 2\Delta x \quad (149)$$

e:

$$y = y_0 + 2\Delta y \quad (150)$$

Definidos os valores de  $x$  e  $y$ , os termos da equação (140) são calculados e então aplicados ao sistema matricial. Desta forma:

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & TC(x,y) & TD(x,y) & TE(x,y) & TA(x,y) & TB(x,y) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ p_{j+1,i} \\ p_{j-1,i} \\ p_{j,i} \\ p_{j,i+1} \\ p_{j,i-1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ e(x,y) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (151)$$

De forma análoga ao realizado para o ponto  $p_{2,2}$ , todos os outros pontos da malha são definidos de modo a construir o sistema completo de equações.

O passo seguinte, consiste na implementação do método SOR propriamente dito. Conforme já mencionado anteriormente, métodos de relaxação são métodos iterativos que, a partir de um valor inicial do vetor  $\mathbf{p}^{(0)}$ , convergem sucessivamente para a solução.

No entanto, o processo de iteração pode, dependendo do tamanho das matrizes envolvidas, demandar um número elevado de iterações, tornando o processamento trabalhoso e lento. Assim, com o objetivo de tornar a convergência da solução mais rápida, o método SOR determina um parâmetro ótimo de relaxação ( $\omega'$ ).

A matriz **AP** é dividida de modo a torná-la facilmente inversível. Assim:

$$\mathbf{AP} = \mathbf{LP} + \mathbf{DP} + \mathbf{UP} \quad (152)$$

onde:

**LP** = Parte inferior da matriz AP;

**DP** = Diagonal principal da matriz AP;

**UP** = Parte superior da matriz AP.

A partir da equação (152), torna-se possível determinar a matriz de iteração. Desta forma:

$$\mathbf{TJ} = (\mathbf{LP} + \mathbf{UP})\mathbf{DP}^{-1} \quad (153)$$

A matriz definida acima possui autovalores que definem a forma como os valores residuais serão suprimidos a cada iteração e, portanto, a velocidade de convergência do método. O raio espectral ( $\rho_{\mathbf{TJ}}$ ) da matriz **TJ** consiste no máximo dos módulos de seus autovalores e define a máxima taxa de convergência.

O parâmetro  $\omega'$  pode, então ser definido como:

$$\omega' = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho_{\mathbf{TJ}}^2}} \quad (154)$$

De acordo com Press (1992) o método converge para uma solução quando  $\omega'$  está entre 0 e 2. No entanto, convergências rápidas requerem valores acima de 1.

Com base na equação (153), constrói-se a matriz de iteração para o método SOR, tal que:

$$\mathbf{T}_\omega = (\mathbf{D}\mathbf{P} - \omega'\mathbf{L}\mathbf{P})^{-1}[(1 - \omega')\mathbf{D}\mathbf{P} + \omega'\mathbf{U}\mathbf{P}] \quad (155)$$

Finalmente o vetor  $\mathbf{p}$  para uma determinada etapa de iteração 'r' pode ser definido como:

$$\mathbf{p}^{(r)} = \mathbf{T}_\omega \mathbf{p}^{(r-1)} + \omega'(\mathbf{D} - \omega'\mathbf{L})^{-1} \mathbf{b}\mathbf{p} \quad (156)$$

A partir do vetor inicial  $\mathbf{p}^{(0)}$ , a equação (156) é resolvida sucessivamente. As iterações são realizadas até que:

$$\mathbf{p}^{(r)} - \mathbf{p}^{(r-1)} \leq \mathbf{tol} \quad (157)$$

onde:

$\mathbf{tol}$  = Tolerância definida para o processo de iterações.

## A.2 Validação da Rotina SOR

Com o objetivo de assegurar a convergência dos resultados obtidos através da rotina de cálculo numérico para resolução da equação diferencial (63), faz-se necessária uma etapa de validação. Será utilizada aqui a equação de Poisson, cujo resultado analítico é conhecido, permitindo a validação da rotina que implementa o método numérico SOR.

A equação de Poisson analisada tem a seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u \quad (158)$$

As condições de contorno para resolução da equação são:

$$u(x, 0) = u(x, 1) = u(0, y) = 0 \quad (159)$$

e:

$$u(1, y) = y \quad (160)$$

onde intervalo analisado é:

$$0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1 \quad (161)$$

A equação (158) admite solução analítica que será utilizada como paradigma. Recorrendo-se ao método da separação de variáveis, a solução da equação é dada por:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi \sinh(\sqrt{1+n^2\pi^2})} \sinh(\sqrt{1+n^2\pi^2}x) \sin(n\pi y) \quad (162)$$

A partir da equação (162) é possível fixar uma malha de pontos de interesse e determinar os respectivos valores de  $u(x,y)$ . Para não tornar esta etapa de validação muito trabalhosa e perder o foco, define-se uma malha de 6 x 6 pontos, com intervalos de 0,2 em  $x$  e  $y$ . Calcularam-se, então, os valores que satisfazem à equação de Poisson nos pontos de interesse, obtendo-se a tabela abaixo:

**Tabela 5. Resultados da equação de Poisson obtidos analiticamente**

<b>Y</b>	<b>1,0</b>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000
	<b>0,8</b>	0,000	0,021	0,055	0,127	0,312	0,800
	<b>0,6</b>	0,000	0,033	0,081	0,170	0,336	0,600
	<b>0,4</b>	0,000	0,031	0,073	0,143	0,251	0,400
	<b>0,2</b>	0,000	0,018	0,042	0,079	0,132	0,200
	<b>0,0</b>	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
		<b>0,00</b>	<b>0,2</b>	<b>0,4</b>	<b>0,6</b>	<b>0,8</b>	<b>1,0</b>
<b>X</b>							

De forma análoga ao realizado analiticamente, a equação de Poisson é resolvida numericamente através da rotina desenvolvida, de modo a se obter os resultados nos mesmos pontos na malha acima. Inicialmente deve-se reescrever a equação conforme o método das diferenças finitas. Assim, tem-se:

$$\frac{u_{j,i+1} - 2u_{j,i} + u_{j,i-1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{j+1,i} - 2u_{j,i} + u_{j-1,i}}{\Delta y^2} = u_{j,i} \quad (163)$$

Como os intervalos nas direções  $x$  e  $y$  são iguais, a equação (163) pode ser reescrita, de modo que:

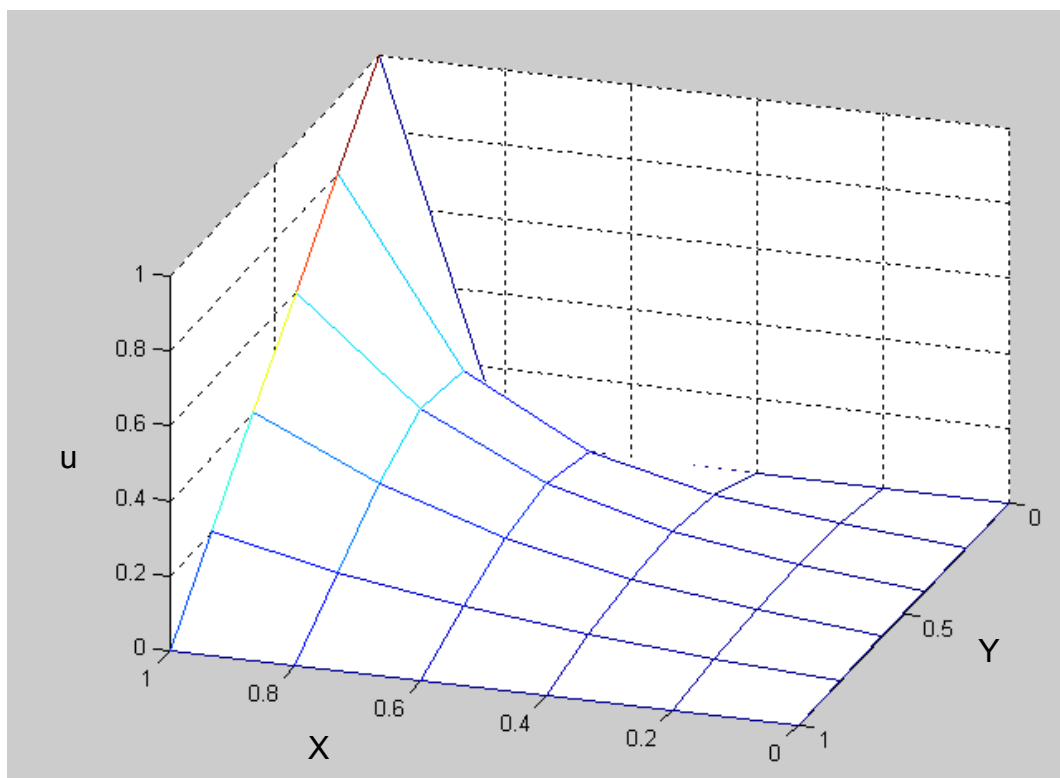
$$u_{j,i+1} - 2u_{j,i} + u_{j,i-1} + u_{j+1,i} - 2u_{j,i} + u_{j-1,i} = \Delta^2 u_{j,i} \quad (164)$$



**Tabela 6. Resultados da equação de Poisson obtidos numericamente**

<b>Y</b>	1,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000
	0,8	0,000	0,023	0,059	0,134	0,313	0,800
	0,6	0,000	0,034	0,084	0,170	0,330	0,600
	0,4	0,000	0,031	0,074	0,141	0,248	0,400
	0,2	0,000	0,018	0,042	0,077	0,130	0,200
	0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
		<b>0,0</b>	<b>0,2</b>	<b>0,4</b>	<b>0,6</b>	<b>0,8</b>	<b>1,0</b>
<b>X</b>							

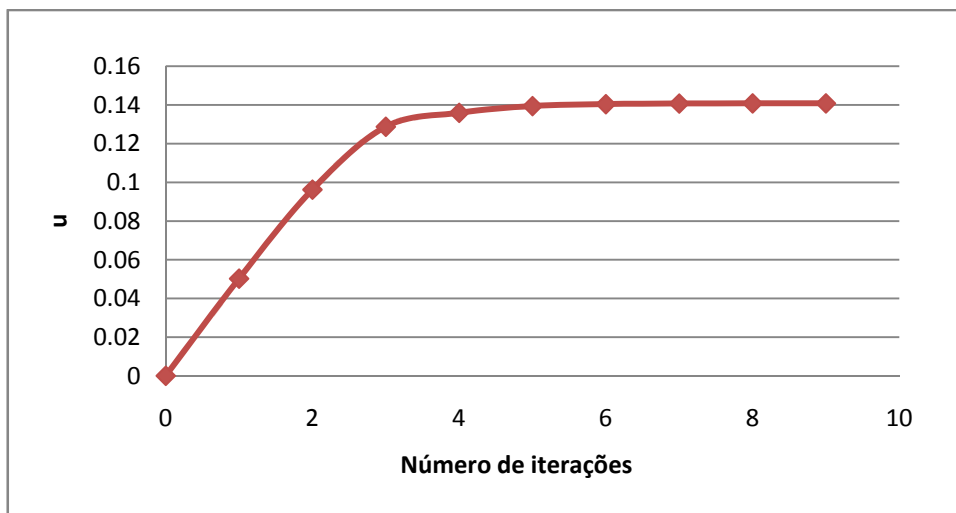
Tais valores podem também ser analisados através do gráfico apresentado na Figura 88.

**Figura 88. Gráfico dos resultados obtidos da equação de Poisson**

Fonte: Elaborado pelo autor

Ao comparar os resultados obtidos analiticamente com os obtidos numericamente, nota-se que a rotina desenvolvida para resolver equações diferenciais parciais converge corretamente para o resultado. No entanto, verifica-se um pequeno erro numérico entre os resultados obtidos. O ponto  $u(5,2)$ , por exemplo, possui variação de aproximadamente 7%, com relação ao valor analítico.

Esta diferença é proveniente do tamanho da malha de pontos que foi adotada. Quanto maior o número de pontos e menor os espaçamentos utilizados, menores serão os erros esperados. Para o caso do cálculo das forças hidrodinâmicas, o estudo do tamanho da malha em função dos resultados e do tempo de processamento é apresentado no Apêndice B.



**Figura 89.** Gráfico do valor do ponto u(4,6) em função do número de iterações

Fonte: Elaborado pelo autor

Além disso, verificou-se, nesta fase de validação da rotina de cálculo, que o número de iterações necessárias para a convergência do resultado é relativamente baixo. O gráfico da Figura 89 apresenta os valores obtidos no cálculo do ponto u(4,6) após cada iteração. Verifica-se que após a sexta iteração o valor final já estava praticamente definido.

### A.3 Validação da rotina de pressão hidrodinâmica

Finalizada a validação da rotina de resolução numérica de equações diferenciais parciais, tem-se a fase de validação da rotina para o cálculo da pressão hidrodinâmica na saia do pistão. No entanto, como a equação da pressão hidrodinâmica utilizada aqui não possui resolução analítica, faz-se uso da equação de pressão em uma dimensão e com velocidade constante. Conforme apresentado anteriormente, este caso particular pode ser expresso por:

$$p_h = \frac{6\mu U}{\tan \eta} \left[ \frac{1}{h} - \frac{1}{h^2} \frac{h_1 h_2}{(h_1 + h_2)} - \frac{1}{(h_1 + h_2)} \right] \quad (169)$$

A equação (169) é, então, aplicada a um caso hipotético de posicionamento do pistão, onde a curva da pressão é calculada. Assim, foram utilizados os seguintes valores de entrada:

$$e_t = 0,00675 \text{ mm} \quad (170)$$

$$e_b = 0,0065 \text{ mm} \quad (171)$$

$$\mu = 0,016 \text{ Ns/m}^2 \quad (172)$$

$$U = 10 \text{ m/s} \quad (173)$$

$$B = 33,8 \text{ mm} \quad (174)$$

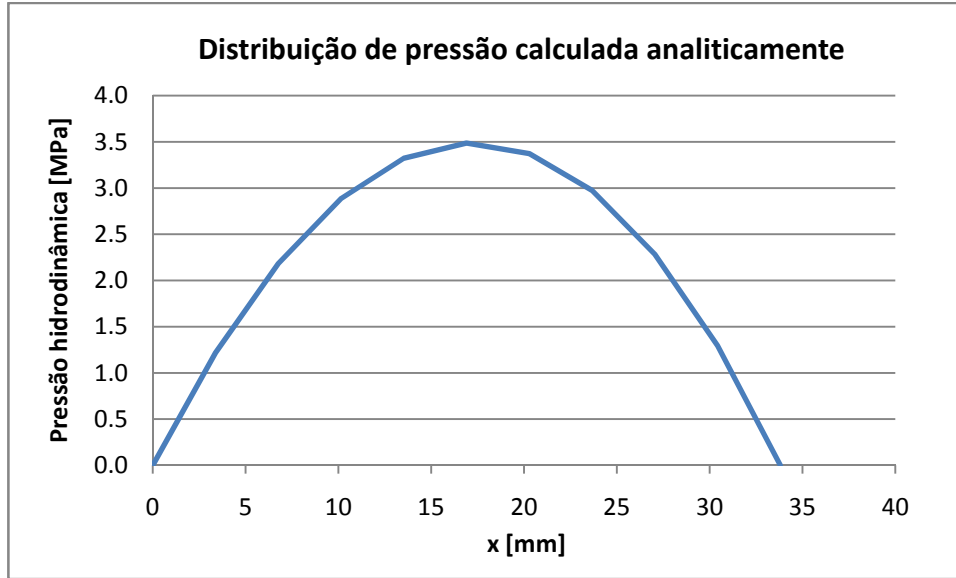
$$\dot{e}_t = \dot{e}_b = 0 \text{ m/s} \quad (175)$$

Considerando uma malha de dez pontos, os valores de pressão hidrodinâmica são calculados. Os resultados estão apresentados na Tabela 7 e a curva completa de pressão ao longo da superfície é apresentada na Figura 90.

**Tabela 7. Pressão hidrodinâmica obtida analiticamente**

<b>h [mm]</b>	<b>ph [MPa]</b>
0,00675	0,0000
0,00673	1,1283
0,00670	2,1821
0,00668	2,8856
0,00665	3,3226
0,00663	3,4872
0,00660	3,3731
0,00658	2,9740
0,00655	2,2832
0,00653	1,2942
0,00650	0,0000





**Figura 90. Distribuição de pressão obtida analiticamente**

Fonte: Elaborado pelo autor

Em seguida o mesmo caso é calculado numericamente de modo a comparar os resultados obtidos. Como já visto no capítulo 4.7, a pressão hidrodinâmica na saída do pistão é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \Phi_x h^3 \frac{\partial p_h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Phi_y h^3 \frac{\partial p_h}{\partial y} \right) = 6\mu U \left( \frac{\partial h}{\partial y} + \Omega \frac{\partial \Phi_s}{\partial y} \right) + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} \quad (176)$$

Para adaptar a rotina numérica para a situação observada na resolução analítica, algumas modificações foram realizadas. Inicialmente é necessária a eliminação do efeito da rugosidade superficial. Desta forma:

$$\Phi_x = \Phi_y = \Phi_s = 1 \quad (177)$$

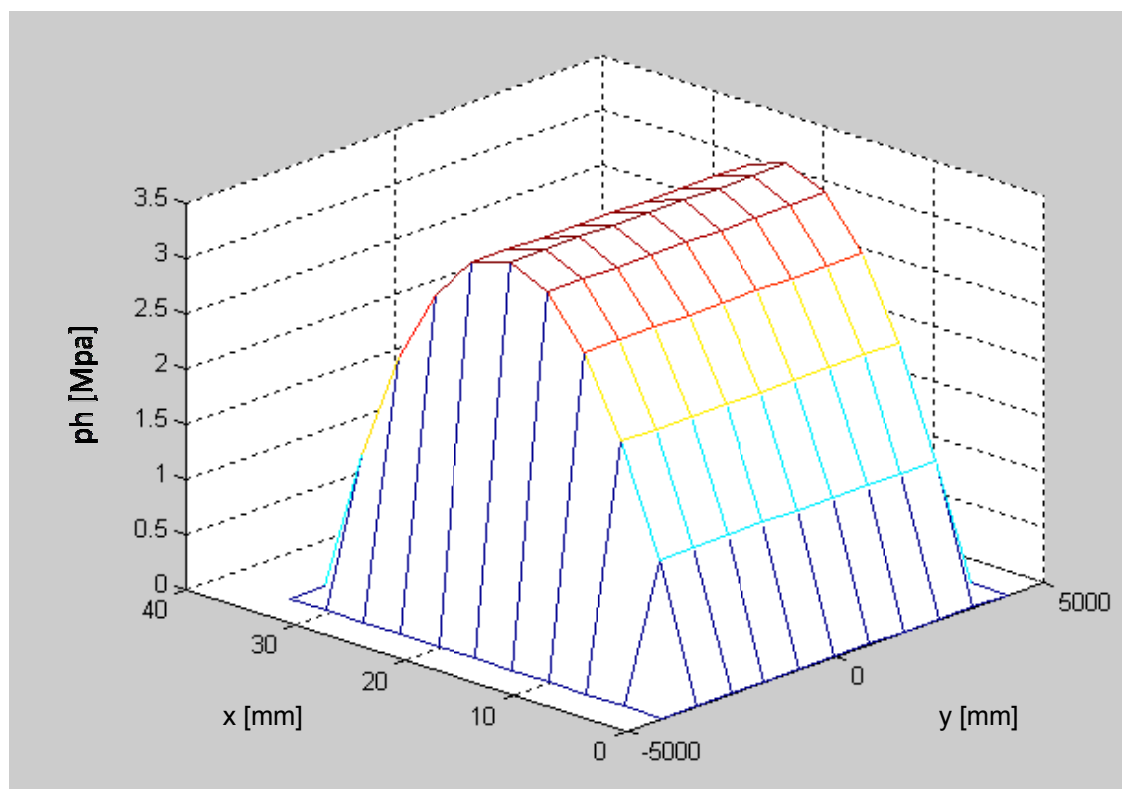
Para eliminar o efeito gerado pela superfície cilíndrica na distância entre as duas superfícies, a espessura do filme de óleo foi calculada conforme a equação abaixo.

$$\bar{h} = e_t(t) + [e_b(t) - e_t(t)] \frac{y}{L} \quad (178)$$

Finalmente, para eliminar a variação no perfil de pressão na direção perpendicular ao movimento do pistão, a largura da saia foi aumentada em dez vezes em relação ao seu valor original. Desta forma, a solução encontrada será

praticamente unidimensional e o valor encontrado no centro da superfície terá pouca, ou nenhuma, influência dos valores de contorno na direção  $x$ .

O resultado obtido é apresentado no gráfico da Figura 91. Ao comparar os valores calculados nos pontos centrais, com os valores calculados analiticamente, verifica-se forte semelhança, com variações desprezíveis.



**Figura 91. Distribuição de pressão obtida numericamente**

Fonte: Elaborado pelo autor

## **APÊNDICE B – Avaliação do tamanho da malha de pontos que define a área da saia do pistão**

O cálculo da pressão hidrodinâmica na saia do pistão, bem como das forças resultantes desta pressão, é realizado a cada intervalo de tempo. Considerando ainda que, para cada simulação realizada, são necessários em torno de quatro ciclos do motor para que seja obtida convergência dos resultados, a rotina de pressão hidrodinâmica é aplicada inúmeras vezes. Assim, a definição da resolução da malha de pontos deve ser realizada com critério, de modo a não prejudicar o resultado obtido, sem elevar substancialmente o tempo de processamento.

A avaliação do tamanho da malha consiste em aplicar a rotina de cálculo para uma determinada condição de trabalho do pistão, variando-se o número total de pontos. Tendo em mente que a força de atrito hidrodinâmico é de complexa obtenção, pois seu cálculo possui uma derivada da curva de pressão, bem como sua posterior integração, considerou-se tal integração como parâmetro de mérito. A convergência dos resultados obtidos, em cada resolução de pontos, para um valor comum, bem como o tempo de processamento necessário são então avaliados, buscando-se o melhor compromisso.

Assim, foram utilizados os seguintes valores de entrada:

$$e_t = 0,00675 \text{ mm} \quad (179)$$

$$e_b = 0,0065 \text{ mm} \quad (180)$$

$$\mu = 0,016 \text{ Ns/m}^2 \quad (181)$$

$$U = 10 \text{ m/s} \quad (182)$$

$$L = 33,8 \text{ mm} \quad (183)$$

$$R = 41,5 \text{ mm} \quad (184)$$

$$\dot{e}_t = \dot{e}_b = 0 \text{ m/s} \quad (185)$$

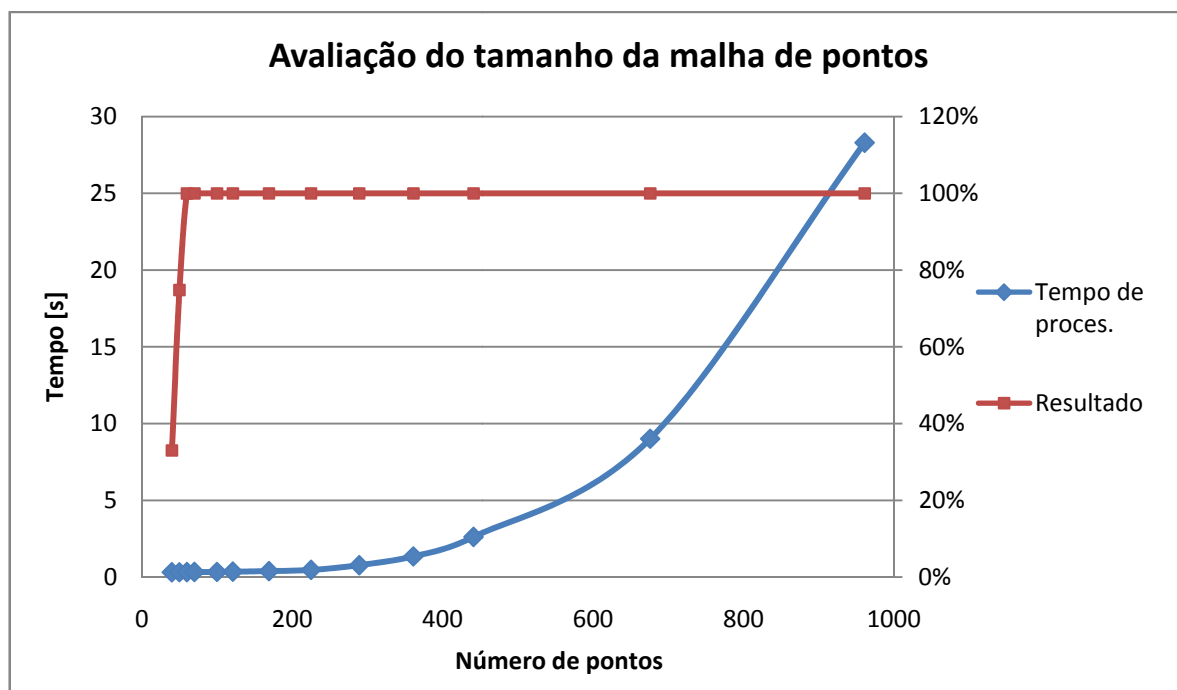
Já as configurações de espaçamento das malhas e o número total de pontos são apresentados na Tabela 8. São avaliadas malhas de 40 até 961 pontos.

**Tabela 8. Número de pontos das malhas avaliadas**

<b>X</b>	<b>Y</b>	<b>TOTAL</b>
4	10	40
5	10	50
6	10	60
7	10	70
10	10	100
11	11	121
13	13	169
15	15	225
17	17	289
19	19	361
21	21	441
26	26	676
31	31	961

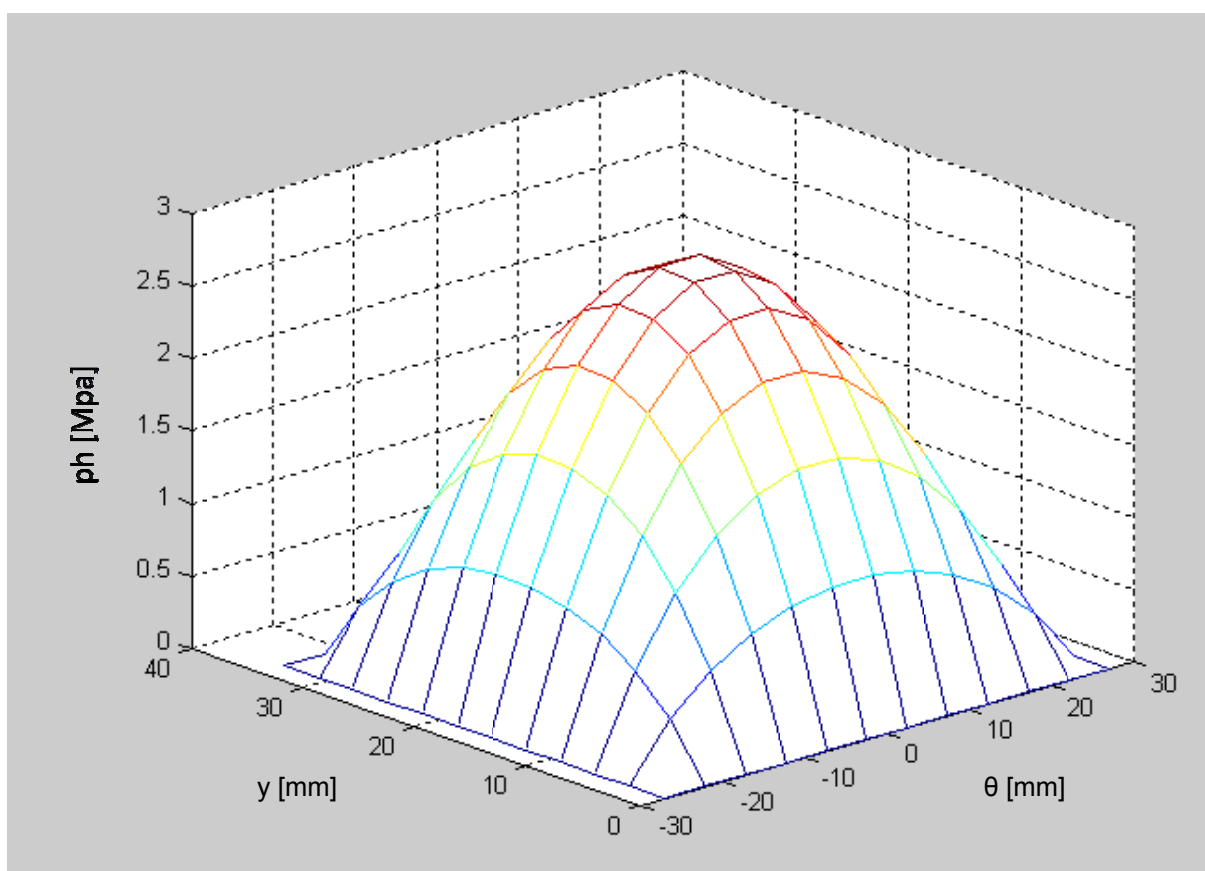
Definidas todas as condições de simulação, a rotina é aplicada para cada caso. A Figura 92 apresenta o gráfico contendo os resultados obtidos, assim como, o tempo de processamento necessário em função do número de pontos. Verifica-se que os valores convergem para o mesmo valor a partir de malhas com 60 a 70 pontos. Malhas maiores implicam em pequena variação no cálculo numérico da força de atrito hidrodinâmico. Já o tempo de processamento aumenta de forma exponencial à medida em que o número de pontos é elevado. Isto ocorre, pois a rotina de diferenças finitas necessita de mais etapas de iteração para convergir para o resultado correto.

Desta forma, a malha escolhida para ser utilizada na implementação do simulador é de 12x12 pontos, posto que não eleva significativamente o tempo de processamento e exibe boa convergência dos resultados. A curva de pressão hidrodinâmica calculada com esta malha é apresentada na Figura 93.



**Figura 92. Gráfico dos resultados obtidos da força de atrito hidrodinâmico e do tempo de processamento em função do número de pontos**

Fonte: Elaborado pelo autor



**Figura 93. Gráfico da pressão hidrodinâmica ao longo da superfície da saia do pistão calculada com uma malha de 12x12 pontos.**

Fonte: Elaborado pelo autor

## APÊNDICE C – Resolução numérica da equação para cálculo da pressão de contato

Conforme apresentado anteriormente, o cálculo da pressão de contato existente no contato metal com metal entre o pistão e o cilindro do motor, é realizado a partir da solução da integral abaixo:

$$\delta = -\frac{2}{\pi^2 \tan(\bar{\alpha})} \int_{-q}^q \ln|s| \ln \left[ \frac{q + (q^2 - s^2)^{0.5}}{q - (q^2 - s^2)^{0.5}} \right] ds \quad (186)$$

No entanto, esta equação não é de fácil resolução analítica, devendo assim ser solucionada numericamente, para então ser aplicada nos cálculos que levam à solução completa do problema. O primeiro passo para sua resolução é a sua adimensionalização. Conforme apresentado, a largura do contato existente em cada ondulação pode ser definida como:

$$q_\alpha = \frac{P_w}{E'} \tan(\bar{\alpha}) \quad (187)$$

onde:

$q_\alpha$  = Largura do contato em cada ondulação [m];

$P_w$  = Força de contato por unidade de comprimento [N/m];

$E'$  = Módulo de elasticidade equivalente dos materiais [Pa];

$\bar{\alpha}$  = Ângulo da ondulação [°].

Assim, a largura do contato é inicialmente adimensionalizada, de forma que:

$$\hat{q} = \frac{q}{q_\alpha} = 1 \quad (188)$$

e:

$$\delta = \hat{\delta} \frac{P_w}{E'} \tan(\bar{\alpha}) \quad (189)$$

A equação (186) é então reescrita:

$$\hat{\delta} = -\frac{2}{\pi^2 \tan(\bar{\alpha})} \int_0^1 \ln|\hat{s}| \ln \left[ \frac{\hat{q} + (\hat{q}^2 - \hat{s}^2)^{0.5}}{\hat{q} - (\hat{q}^2 - \hat{s}^2)^{0.5}} \right] d\hat{s} \quad (190)$$

Esta integral definida, por sua vez, pode ser facilmente resolvida numericamente. Utiliza-se aqui o simples método de integração por trapézios, com espaçamentos bem pequenos, da ordem de 1E-6, de modo a eliminar a influência da descontinuidade verificada em  $\hat{q}$  igual a zero.

Assim, da resolução da integral da equação (190) tem-se:

$$\hat{\delta} = -\frac{2}{\pi^2 \tan(\bar{\alpha})} (-5.318) \quad (191)$$

Por sua vez, a expressão acima pode ser reescrita na forma:

$$\delta = \left[ -\frac{2}{\pi^2 \tan(\bar{\alpha})} (-5.318) \right] \left( \frac{P_w}{E'} \tan(\bar{\alpha}) \right) \quad (192)$$

Finalmente obtém-se:

$$P_w = \frac{\delta E'}{1.077} \quad (193)$$

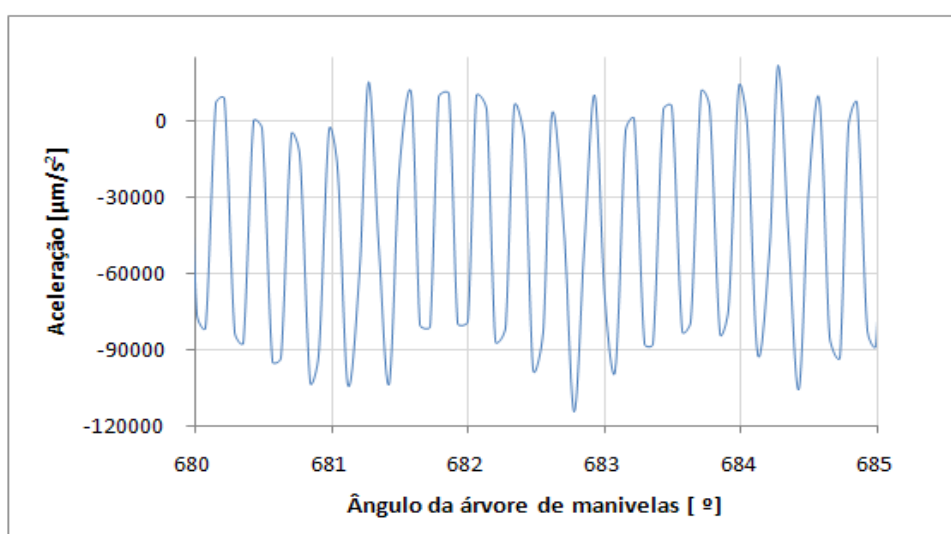
A equação (193) apresentada, cuja resolução analítica e numérica é trivial e direta, deverá ser utilizada no cálculo da pressão de contato entre a saia do pistão e o cilindro do motor.

## APÊNDICE D – Características numéricas do modelo de simulação

Durante a fase de simulação foram verificadas algumas instabilidades numéricas. Tal instabilidade se deve às próprias características físicas do conjunto aqui estudado. As elevadas acelerações na direção y às quais o pistão é exposto, a massa do conjunto da ordem de 0,3 kg, bem como as elevadas variações da força hidrodinâmica em função de pequenas variações da espessura do filme de óleo, podem implicar na instabilidade numérica do sistema. Foram observadas elevados valores de aceleração com frequências muito altas, decorrentes de instabilidade numérica do método de integração adotado.

Como consequência, visto que o método numérico se utiliza da posição do pistão no instante imediatamente anterior para o cálculo de sua aceleração, foi necessária a utilização de intervalos de tempo muito pequenos para a convergência dos resultados. Cabe salientar que o método de integração utilizado foi o ODE45 disponível no *software* Matlab®.

A Figura 94 apresenta o comportamento rapidamente oscilatório da aceleração em um pequeno intervalo de tempo, onde esta oscila em torno de um valor como reação do cálculo anterior. Por este motivo o tempo de processamento se elevou drasticamente inviabilizando a simulação.



**Figura 94. Instabilidade da aceleração do pistão na direção z sem a utilização de filtro**

Fonte: Elaborado pelo autor



Desta forma, a alternativa adotada para eliminar tal instabilidade foi a utilização de filtros, de modo a limitar a frequência espúria de oscilação, presente no sinal da aceleração calculada, a valores considerados como aceitáveis. Aplicando-se um filtro do tipo passa-baixa, de segunda ordem, com frequência de corte de 500 Hz, foi possível estabilizar o método numérico e aumentar o intervalo de simulação para aproximadamente 0,1°, reduzindo o tempo de processamento.

## APÊNDICE E – Validação da rotina numérica implementada

Finalizada a etapa de desenvolvimento e implementação da rotina numérica, bem como de desenvolvimento do diagrama de blocos, para o cálculo da dinâmica do pistão, faz-se necessária a sua validação. Tendo em vista as dificuldades em confrontar os resultados numéricos com resultados experimentais, optou-se aqui em compará-los com os resultados obtidos por Zhu et al.(1992).

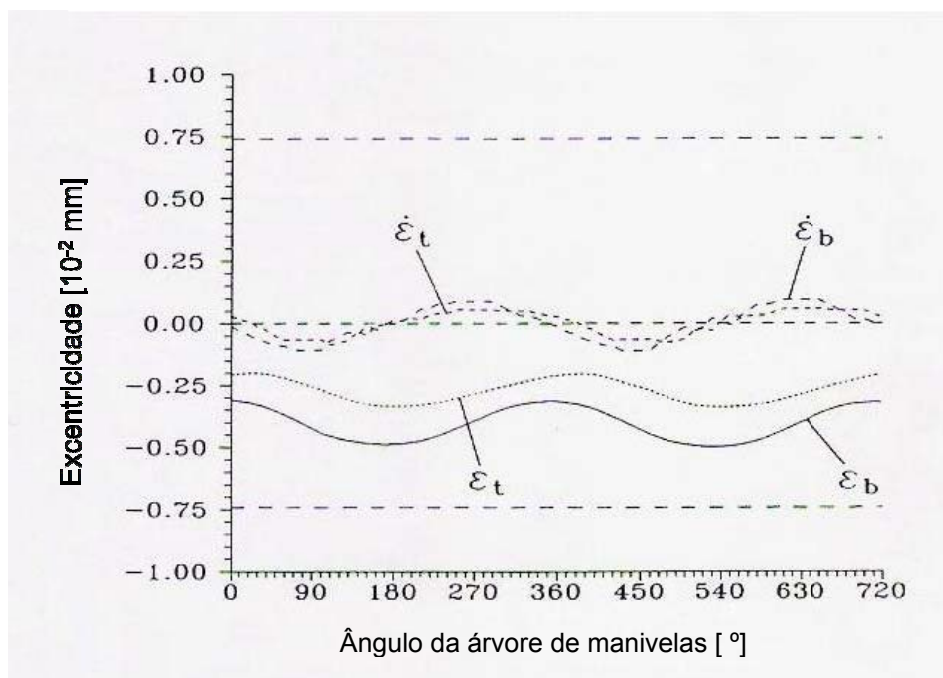
Uma condição específica avaliada por Zhu et al. (1992) foi selecionada e seus dados de entrada determinados. Infelizmente, nem todos os dados foram disponibilizados no artigo publicado por Zhu et al. (1992). Assim, para estes parâmetros, foram utilizados valores considerados como comuns e aplicáveis para este caso.

A condição de operação do motor da avaliação é de mil rotações por minuto, sem a existência de combustão, simulando freio motor. Seguem, abaixo, os dados utilizados por aqueles autores.

**Tabela 9. Dados de entrada para validação da rotina**

<b>DADOS DE ENTRADA:</b>		
Diâmetro do pistão (2R)	83,0	mm
Raio da árvore de manivelas (r)	41,8	mm
Comprimento da biela (l)	133,0	mm
Altura da saia do pistão (L)	33,8	mm
Limite da saia do pistão ( $\theta_1$ e $\theta_2$ )	37,5	°
Folga de trabalho (C)	10,0	$\mu\text{m}$
Off-set do pino (Cp)	1,0	mm
Distância ao C.G. (Cg)	2,0	mm
Distância do pino à saia sup. (a)	12,5	mm
Distância do C.G. à saia sup. (b)	1,5	mm
Massa do pino ( $m_{\text{pin}}$ )	0,09	kg
Massa do pistão ( $m_{\text{pis}}$ )	0,295	kg
Momento de inércia do pistão ( $I_{\text{pis}}$ )	250,0	$\text{kgmm}^2$
Módulo de elasticidade (E')	109	GPa
Viscosidade do óleo ( $\mu$ )	0,016	Pas
Altura da ondulação ( $\Omega$ )	3,5	$\mu\text{m}$
Comprimento da onda (LO)	250,0	$\mu\text{m}$
Coeficiente de atrito ( $\mu_c$ )	0.15	
Velocidade angular do motor ( $\omega$ )	1000	rpm

Os resultados obtidos por Zhu et AL. (1992) são divididos em dois gráficos, o primeiro com as excentricidades de Pt e Pb, bem como suas velocidades na direção de x, e o segundo com a força de atrito. A Figura 95 apresenta o primeiro deles.

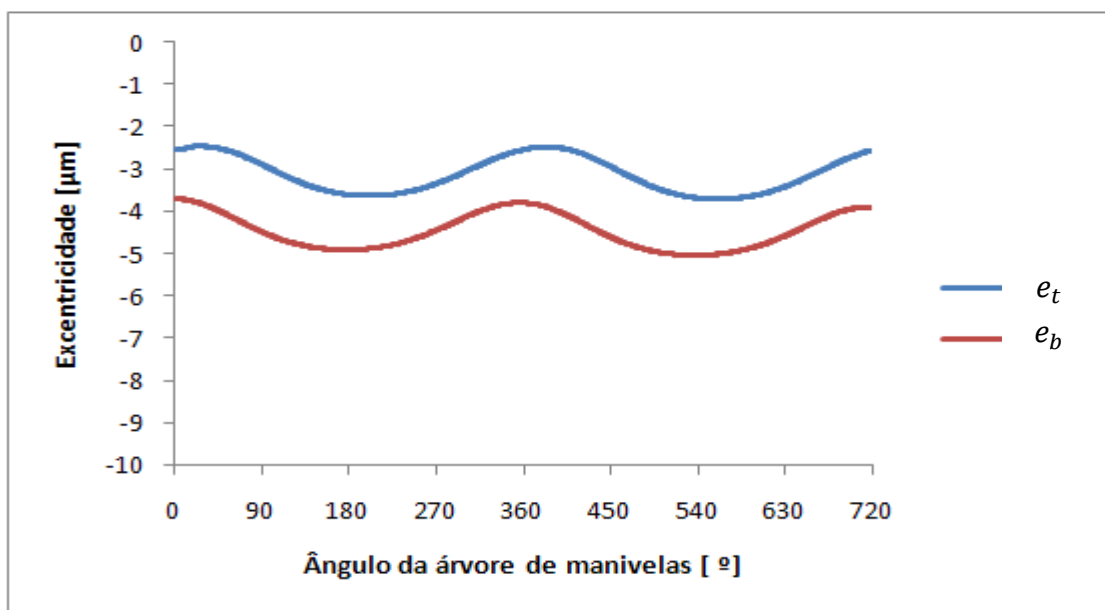


**Figura 95. Resultado obtido por Zhu et. al (1992) para as excentricidades  $\epsilon_t$  e  $\epsilon_b$ , e suas respectivas velocidades, a 1000 rpm, sem combustão**  
 Fonte: ZHU, D. et al.: 1991, p.561 v.114.

Nota-se que nestas condições, o pistão possui movimentação suave, oscilando em torno de  $-4,0 \mu\text{m}$  em relação ao centro do cilindro. Tal característica se deve à inexistência de combustão, o que permite reduzir o período de simulação para  $360^\circ$  da árvore de manivelas. Cabe ainda salientar que ambos os pontos Pt e Pb se movimentam em fase, variando pouco a inclinação do pistão. Isto se reflete nas velocidades, que possuem valores muito semelhantes.

Ao comparar tais resultados com os obtidos através da rotina numérica aqui implementada, verifica-se forte semelhança. A Figura 96 a seguir apresenta os resultados obtidos para as excentricidades dos pontos Pt e Pb ao longo do curso do pistão. Semelhantemente ao obtido por Zhu et. al (1992), o valor de  $\epsilon_t$  oscila entre  $-2,5 \mu\text{m}$  e  $-3,5 \mu\text{m}$ , bem como o valor de  $\epsilon_b$  oscila entre  $-3,5 \mu\text{m}$  e  $-5 \mu\text{m}$ . Mesmo que irrelevantes, pequenas diferenças evidenciadas na rotação do pistão em torno do

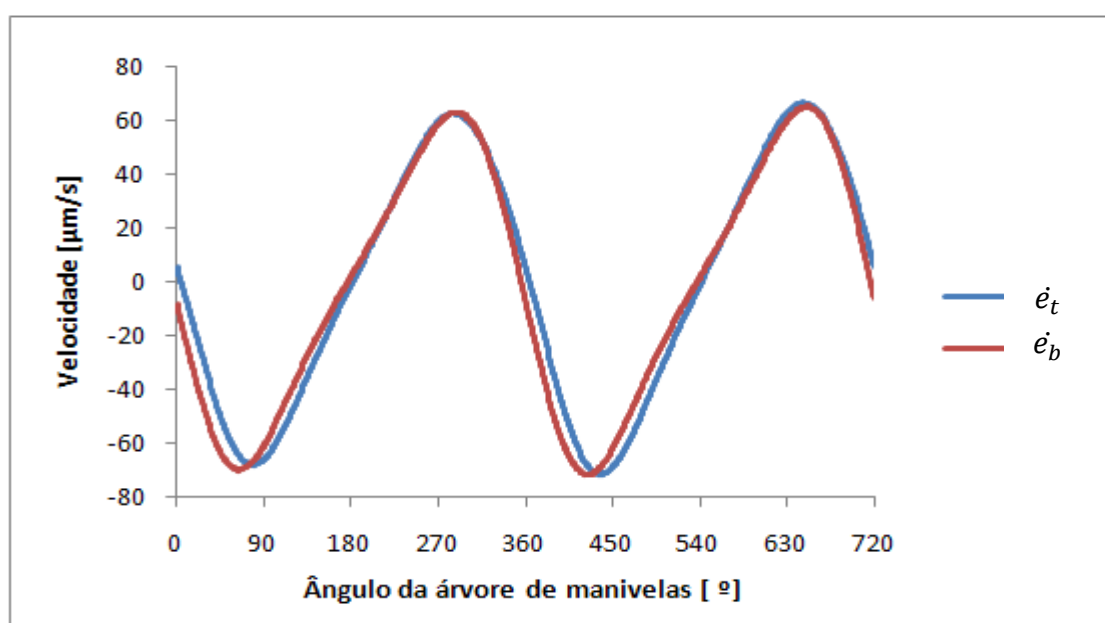
eixo de seu pino podem ter como fonte o valor adotado para o momento de inércia do pistão, o qual não foi informado no artigo de Zhu et. al (1992).



**Figura 96. Gráfico das excentricidades  $e_t$  e  $e_b$ , a 1000 rpm e sem combustão**

Fonte: Elaborado pelo autor

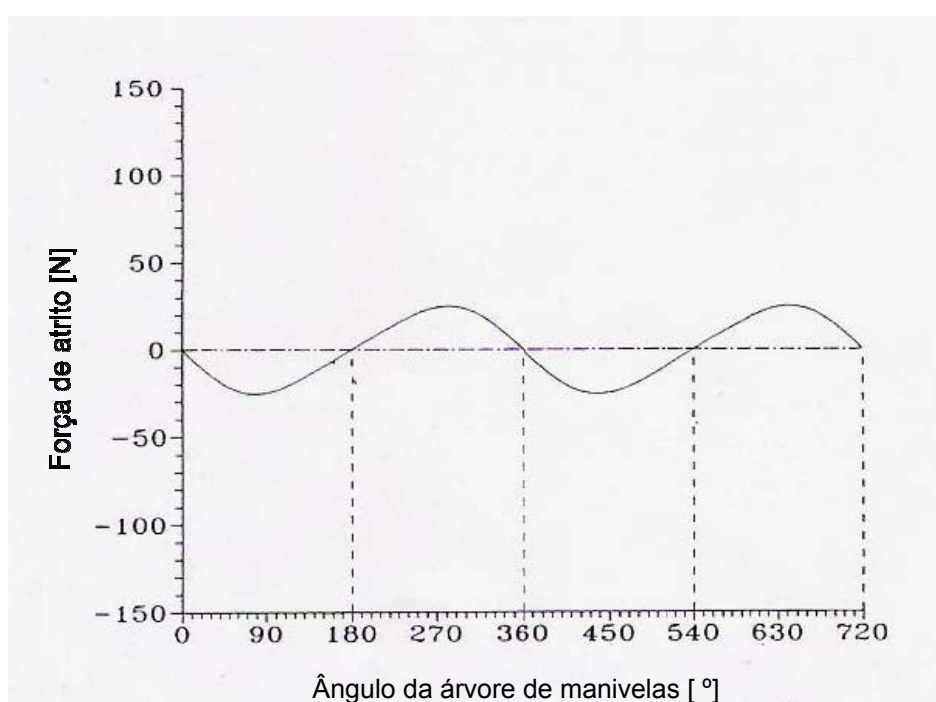
Já o gráfico da Figura 97 apresenta os resultados obtidos para as velocidades dos pontos Pt e Pb na direção z. Assim como verificado por Zhu et al (1992), tais valores permanecem praticamente iguais um ao outro, ao longo de todo o ciclo, com pequenas variações quando a árvore de manivelas está em 90° e o pistão encontra-se movimentando-se em direção ao PMI.



**Figura 97. Gráfico das velocidades dos pontos Pt e Pb a 1000 rpm e sem combustão**

Fonte: Elaborado pelo autor

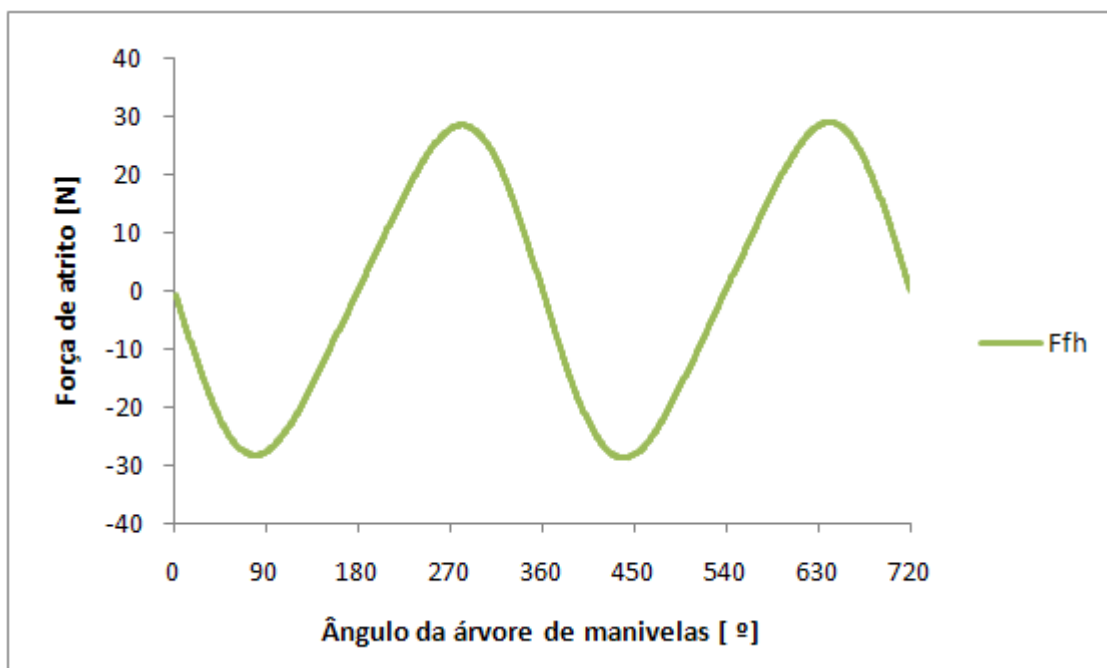
Finalmente são avaliados os resultados obtidos para as forças de atrito. Como os valores máximos das excentricidades são pequenos, não são evidenciados, nesta condição de operação, contato entre a saia do pistão e o cilindro do motor. Assim, toda parcela da força de atrito é proveniente da ação do filme hidrodinâmico. A Figura 98 apresenta o resultado obtido por Zhu et al (1992). Nele verifica-se que o valor absoluto máximo da força de atrito ocorre a cada  $90^\circ$  do motor onde a velocidade do pistão também é máxima. Para este tipo de operação, obteve-se valores em torno de 30 N.



**Figura 98. Resultado obtido por Zhu et. al (1992) da força de atrito a 1000 rpm sem combustão.**

Fonte: ZHU, D. et al.: 1991, p.561 v.114.

Semelhantemente ao verificado acima, os resultados da força de atrito obtidos com a rotina implementada também atingiram valores máximos da ordem de 30N e a cada  $90^\circ$  da árvore de manivelas. O gráfico da força de atrito obtido para esta condição pode ser visto na Figura 99.



**Figura 99. Gráfico da força de atrito na saia do pistão a 1000 rpm e sem combustão**

Fonte: Elaborado pelo autor

Com base nos resultados expostos acima, considera-se a rotina aqui implementada como correta, reproduzindo resultados obtidos por Zhu et al (1992).

## APÊNDICE F – Códigos de programação

Conforme anteriormente comentado, toda a implementação numérica do modelo matemático foi realizada no *software* Matlab®. O modelo está dividido em duas rotinas de cálculo, uma para definição dos dados iniciais e outra para determinar os esforços aplicados no pistão em cada instante da simulação. São apresentados a seguir os códigos de programação, em linguagem Matlab®, de cada uma destas rotinas.

### C.1 Dados de entrada

```
%Dados de entrada para a simulação
```

```
%Dados do pistão:
```

```
%Dados gerais:
```

```
mpis = 0.236;           % Massa do pistão [kg]
mpin = 0.052;           % Massa do pino do pistão [kg]
Ipis = 136E-6;          % Momento de inércia do pistão [kg*m^2]

Diam = 76.48E-3;        % Diâmetro do pistão [m]
L = 30.3E-3;            % Altura da saia do pistão [m]

Cp = 0.2E-3;            % Offset do pino [m]
Cg = 0.325E-3;          % Dist. do C.G. do pistão ao ponto A [m]
```

```
%Dados da saia:
```

```
a = 8.4E-3;             % Dist do ponto Pt do pistão ao ponto A [m]
b = 0.3E-3;             % Dist do ponto Pt do pistão ao ponto B [m]

Teta_p = 0.6213;        % Limite da saia lp do pistão [rad]
Teta_cp = 0.5306;       % Limite da saia lcp do pistão [rad]

Omega = 0.004E-3;       % Ondulação da saia do pistão [m]
Comp = 0.25E-3;         % Comp. das ondulações da saia do pistão [m]
```

```
%Dados do conjunto:
```

```
C = 0.01E-3;            % Folga entre o pistão e o cilindro [m]
l = 144E-3;             % Comprimento da biela [m]
r = 37.8E-3;            % Raio da árvore de manivelas [m]
```

```
%Propriedades físicas:
```

```
mi = 0.016;           % Viscosidade do óleo [Pa.s]
E = 90E7;             % Módulo de elasticidade [Pa]
mi_f = 0.15;          % Coef. de atrito entre o pistão e o cilindro
```

```
% Matriz de massa:
```

```
m1 = mpin*(1-(a/L)) + mpis*(1-(b/L));
m2 = mpin*(a/L) + mpis*(b/L);
m3 = Ipis/L + mpis*(a-b)*(1-(b/L));
m4 = mpis*(a-b)*(b/L) - Ipis/L;

massa = [m1,m2;m3,m4];
```

## C.2 Cálculo das forças

```
function [sys,x0,str,ts] = Calculos(t,x,u,flag)
```

```
switch flag,
```

```
case 0
```

```
    [sys,x0,str,ts]=mdlInitializeSizes;
```

```
case 3
```

```
    sys=mdlOutputs(t,x,u);
```

```
case { 1, 2, 4, 9 }
```

```
    sys=[];
```

```
otherwise
```

```
    error(['Unhandled flag = ',num2str(flag)]);
```

```
end
```

```
function [sys,x0,str,ts] = mdlInitializeSizes()
```

```
sizes = simsizes;
```

```
sizes.NumContStates = 0;
```

```
sizes.NumDiscStates = 0;
```

```
sizes.NumOutputs = 12;
```

```
sizes.NumInputs = 20;
```

```
sizes.DirFeedthrough = 1;
```

```
sizes.NumSampleTimes = 1;
```

```
sys = simsizes(sizes);
```

```
str = [];
```

```
x0 = [];
```

```
ts = [-1 0];
```



```

function sys = mdlOutputs(t,x,u)

et = u(1,1);
eb = u(2,1);
et_p = u(3,1);
eb_p = u(4,1);
rpm = u(5,1);
C = u(6,1);
L = u(7,1);
Diam = u(8,1);
Teta_p = u(9,1);
Teta_cp = u(10,1);
omega = u(11,1);
a = u(12,1);
Comp = u(13,1);
mi_1 = u(14,1);
E = u(15,1);
mif = u(16,1);
Cp = u(17,1);
clock = u(18,1);
l = u(19,1);
r = u(20,1);

% Cinemática:

psi = clock*rpm*6;
psiabs = psi;

while psi>720
    psi = psi - 720;
end

w_arv = rpm*2*3.141593/60;
psi_rad = 3.141593*psi/180;

B_cine = Cp + r*sin(psi_rad);

phi_cine = -atan(B_cine*((l^2) - (B_cine^2))^(0.5));

Vel = r*w_arv*sin(psi_rad) + r*w_arv*B_cine*cos(psi_rad)*(((l^2)-(B_cine^2))^(0.5));

Y_2p = r*(w_arv^2)*cos(psi_rad) +
((r*w_arv*B_cine*cos(psi_rad))^2)*(((l^2)-(B_cine^2))^(1.5)) +
(((r*w_arv*cos(psi_rad))^2)-r*(w_arv^2)*B_cine*sin(psi_rad))*(((l^2)-(B_cine^2))^(0.5));

%Definições gerais:

mi = mi_1;

x_p = Teta_p*Diam/2;           %Limites da saia do pistão [mm]
x_cp = Teta_cp*Diam/2;

le_p = -x_p;                   %Intervalo do domínio no eixo x
le_cp = -x_cp;

```

```

li = 0;                                %Intervalo do domínio no eixo y
ls = L;

PX = 9;                                %Número de partições no intervalo - Ph [le,ld]
PY = 9;                                %Número de partições no intervalo - Ph [li,ls]

delta_x_p = (2*x_p)/PX;                %Cálculo dos espaçamentos - Ph
delta_x_cp = (2*x_cp)/PX;
delta_y = (ls-li)/PY;

PX_c = 20;                             %Número de partições no intervalo - Pc [le,ld]
PY_c = 135;                            %Número de partições no intervalo - Pc [li,ls]

delta_x_p_c = -(2*le_p)/PX_c;          %Cálculo dos espaçamentos - Pc
delta_x_cp_c = -(2*le_cp)/PX_c;
delta_y_c = Comp;

%Cálculo das Forças:

%Pressão Hidrodinâmica:

i = 1;

h_flag = 0;
if et == eb
    ph_p = zeros((PX-1)*(PY-1),1);
    ph_cp = zeros((PX-1)*(PY-1),1);
    h_flag = 1;
end
if C <= abs(et)
    ph_p = zeros((PX-1)*(PY-1),1);
    ph_cp = zeros((PX-1)*(PY-1),1);
    h_flag = 1;
end
if C <= abs(eb)
    ph_p = zeros((PX-1)*(PY-1),1);
    ph_cp = zeros((PX-1)*(PY-1),1);
    h_flag = 1;
end

while i<=(PX+1)
    j = 1;
    x_p = (i-1)*delta_x_p+le_p;
    teta_p = 2*x_p/Diam;

    x_cp = (i-1)*delta_x_cp+le_cp;
    teta_cp = 2*x_cp/Diam;

    while j<=(PY+1)

        y = (j-1)*delta_y+li;

% Lado Pressão:

        % Cálculo da espessura do filme:
        h_medio_p(j,i) = C+et*cos(teta_p)+(eb-et)*y*cos(teta_p)/L;

```

```

dhdt_p(j,i) = cos(teta_p)*(et_p*(1 - y/L) + eb_p*y/L);
dhdteta_p(j,i) = (-et_p*sin(teta_p)-(eb-et)*y*sin(teta_p)/L);
dhdy_p(j,i) = cos(teta_p)*(eb-et)/L;

% Cálculo dos fatores de fluxo:
phi_y_p(j,i) = (1-(omega/h_medio_p(j,i))^2)^2;
phi_x_p(j,i) = 1+(omega/h_medio_p(j,i))^2;
dphi_sdy_p(j,i) = -omega*dhdy_p(j,i)*h_medio_p(j,i)^(-2);

% Cálculo das funções da equação diferencial

alpha_p(j,i) = phi_x_p(j,i)*h_medio_p(j,i)^3;

beta_p(j,i) = 3*(h_medio_p(j,i)^2)*(2/Diam)*dhdteta_p(j,i)+
(2/Diam)*dhdteta_p(j,i)*omega^2;

gama_p(j,i) = phi_y_p(j,i)*h_medio_p(j,i)^3;

delta_p(j,i) = 3*(h_medio_p(j,i)^2)*dhdy_p(j,i)-
2*(omega^2)*dhdy_p(j,i)-(omega^4)*dhdy_p(j,i)*h_medio_p(j,i)^(-2);

epsilon_p(j,i) = -6*mi*Vel*(dhdy_p(j,i)+omega*dphi_sdy_p(j,i))
+12*mi*dhdt_p(j,i);

TA_p(j,i) = alpha_p(j,i)/(delta_x_p^2)+beta_p(j,i)/(2*delta_x_p);
TB_p(j,i) = alpha_p(j,i)/(delta_x_p^2)-beta_p(j,i)/(2*delta_x_p);
TC_p(j,i) = gama_p(j,i)/(delta_y^2)+delta_p(j,i)/(2*delta_y);
TD_p(j,i) = gama_p(j,i)/(delta_y^2)-delta_p(j,i)/(2*delta_y);
TE_p(j,i) = -2*(alpha_p(j,i)/(delta_x_p^2)+
gama_p(j,i)/(delta_y^2));
TF_p(j,i) = -2*gama_p(j,i)/(delta_y^2);

% Lado Contrapressão:

% Cálculo da espessura do filme:
h_medio_cp(j,i) = C-et*cos(teta_cp)-(eb-et)*y*cos(teta_cp)/L;
dhdt_cp(j,i) = cos(teta_cp)*(et_p*(y/L-1) - eb_p*y/L);
dhdteta_cp(j,i) = et_p*sin(teta_cp)+(eb-et)*y*sin(teta_cp)/L;
dhdy_cp(j,i) = -cos(teta_cp)*(eb-et)/L;

% Cálculo dos fatores de fluxo:
phi_y_cp(j,i) = (1-(omega/h_medio_cp(j,i))^2)^2;
phi_x_cp(j,i) = 1+(omega/h_medio_cp(j,i))^2;
dphi_sdy_cp(j,i) = -omega*dhdy_cp(j,i)*h_medio_cp(j,i)^(-2);

% Cálculo das funções da equação diferencial

alpha_cp(j,i) = phi_x_cp(j,i)*h_medio_cp(j,i)^3;

beta_cp(j,i) = 3*(h_medio_cp(j,i)^2)*(2/Diam)*dhdteta_cp(j,i)+
(2/Diam)*dhdteta_cp(j,i)*omega^2;

gama_cp(j,i) = phi_y_cp(j,i)*h_medio_cp(j,i)^3;

delta_cp(j,i) = 3*(h_medio_cp(j,i)^2)*dhdy_cp(j,i)-
2*(omega^2)*dhdy_cp(j,i)-(omega^4)*dhdy_cp(j,i)*h_medio_cp(j,i)^(-2);

```

```

        epsilon_cp(j,i) = -6*mi*Vel*(dhdy_cp(j,i)+omega*dphi_sdy_cp(j,i))+
12*mi*dhdt_cp(j,i);
        TA_cp(j,i)=alpha_cp(j,i)/(delta_x_cp^2)+beta_cp(j,i)/(2*delta_x_cp)
        TB_cp(j,i)=alpha_cp(j,i)/(delta_x_cp^2)-beta_cp(j,i)/(2*delta_x_cp)
        TC_cp(j,i)=gama_cp(j,i)/(delta_y^2)+delta_cp(j,i)/(2*delta_y);
        TD_cp(j,i)=gama_cp(j,i)/(delta_y^2)-delta_cp(j,i)/(2*delta_y);
        TE_cp(j,i)=-2*(alpha_cp(j,i)/(delta_x_cp^2)+
gama_cp(j,i)/(delta_y^2))
        TF_cp(j,i) = -2*gama_cp(j,i)/(delta_y^2);

        j = j+1;
    end
    i = i+1;
end

dim = (PX-1)*(PY-1);           %Dimensão da matrix dos coeficientes

k=1;                           %Construção das matrizes A e B
i=2;
j=2;

A_p = size(1,1);
A_p(1,1) = 1;
B_p = size(1,1);
B_p(1,1) = 1;

A_cp = size(1,1);
A_cp(1,1) = 1;
B_cp = size(1,1);
B_cp(1,1) = 1;

while k<=dim
    if i==(PX/2)+1
        A_p(k,k) = TF_p(j,i);
        A_cp(k,k) = TF_cp(j,i);
    end
    if i~=(PX/2)+1
        A_p(k,k) = TE_p(j,i);
        A_cp(k,k) = TE_cp(j,i);
        if i~=PX
            A_p(k,k+1) = TA_p(j,i);
            A_cp(k,k+1) = TA_cp(j,i);
        end
        if i~=2
            A_p(k,k-1) = TB_p(j,i);
            A_cp(k,k-1) = TB_cp(j,i);
        end
    end
    if j<PY
        A_p(k,k+PX-1) = TC_p(j,i);
        A_cp(k,k+PX-1) = TC_cp(j,i);
    end
    if j>2
        A_p(k,k-PX+1) = TD_p(j,i);
        A_cp(k,k-PX+1) = TD_cp(j,i);
    end

    B_p(k,1) = epsilon_p(j,i);
    B_cp(k,1) = epsilon_cp(j,i);

```

```

        if i<PX
            i = i+1;
        else
            i = 2;
            j = j+1;
        end
        k=k+1;
    end

    if h_flag == 0

        %Rotina SOR para o lado de Pressão:

        n = size(A_p,1);
        DM_p = diag(diag(A_p));
        LM_p = tril(-A_p,-1);
        UM_p = triu(-A_p,1);

        Tj_p = inv(DM_p)*(LM_p+UM_p);
        rho_Tj_p = max(abs(eig(Tj_p)));
        w_p = 2/(1+sqrt(1-rho_Tj_p^2));
        Tw_p = inv(DM_p-w_p*LM_p)*((1-w_p)*DM_p+w_p*UM_p);
        cw_p = w_p*inv(DM_p-w_p*LM_p)*B_p;

        k = 1;
        ph_p_it = zeros(n,1);
        N = 100;
        tol = 1e-05;

        while k <= N
            ph_p_it(:,k+1) = Tw_p*ph_p_it(:,k) + cw_p;
            if norm(ph_p_it(:,k+1)-ph_p_it(:,k)) < tol
                break
            end
            k = k+1;
        end

        ph_p(:,1)=ph_p_it(:,k);

        %Rotina SOR para o lado de Contrapressão:

        n = size(A_cp,1);

        DM_cp = diag(diag(A_cp));
        LM_cp = tril(-A_cp,-1);
        UM_cp = triu(-A_cp,1);

        Tj_cp = inv(DM_cp)*(LM_cp+UM_cp);
        rho_Tj_cp = max(abs(eig(Tj_cp)));
        w_cp = 2/(1+sqrt(1-rho_Tj_cp^2));
        Tw_cp = inv(DM_cp-w_cp*LM_cp)*((1-w_cp)*DM_cp+w_cp*UM_cp);
        cw_cp = w_cp*inv(DM_cp-w_cp*LM_cp)*B_cp;

```

```

k = 1;
ph_cp_it = zeros(n,1);
N = 100;
tol = 1e-05;

while k <= N
    ph_cp_it(:,k+1) = Tw_cp*ph_cp_it(:,k) + cw_cp;
    if norm(ph_cp_it(:,k+1)-ph_cp_it(:,k)) < tol
        break
    end
    k = k+1;
end

ph_cp(:,1)=ph_cp_it(:,k);

end

%Cálculo de Fh e Mh:

k = 1;
j = 1;

while j<=(PY+1)
    i = 1;
    y = (j-1)*delta_y+li;

    while i<=(PX+1)
        x_p = (i-1)*delta_x_p+le_p;
        teta_p = 2*x_p/Diam;

        x_cp = (i-1)*delta_x_cp+le_cp;
        teta_cp = 2*x_cp/Diam;

        if i==1
            ph_fh_p(j,i)=0;
            ph_mh_p(j,i)=0;
            ph_plot_p(j,i) = 0;

            ph_fh_cp(j,i)=0;
            ph_mh_cp(j,i)=0;
            ph_plot_cp(j,i) = 0;
        end
        if j==1
            ph_fh_p(j,i)=0;
            ph_mh_p(j,i)=0;
            ph_plot_p(j,i) = 0;

            ph_fh_cp(j,i)=0;
            ph_mh_cp(j,i)=0;
            ph_plot_cp(j,i) = 0;
        end
        if j==(PY+1)
            ph_fh_p(j,i)=0;

```

```

        ph_mh_p(j,i)=0;
        ph_plot_p(j,i) = 0;

        ph_fh_cp(j,i)=0;
        ph_mh_cp(j,i)=0;
        ph_plot_cp(j,i) = 0;
    end
    if i==(PX+1)
        ph_fh_p(j,i)=0;
        ph_mh_p(j,i)=0;
        ph_plot_p(j,i) = 0;

        ph_fh_cp(j,i)=0;
        ph_mh_cp(j,i)=0;
        ph_plot_cp(j,i) = 0;
    end
    if i>1
        if j>1
            if i<(PX+1)
                if j<(PY+1)
                    if ph_p(k,1) <= 0
                        ph_plot_p(j,i) = 0;
                    else
                        ph_plot_p(j,i) = ph_p(k,1);
                        ph_fh_p(j,i) = ph_plot_p(j,i)*cos(teta_p);
                        ph_mh_p(j,i) = ph_plot_p(j,i)*(a-y)*cos(teta_p);
                    end
                    if ph_cp(k,1) <= 0
                        ph_plot_cp(j,i) = 0;
                    else
                        ph_plot_cp(j,i) = ph_cp(k,1);
                        ph_fh_cp(j,i) = -ph_plot_cp(j,i)*cos(teta_cp);
                        ph_mh_cp(j,i) = -ph_plot_cp(j,i)*(a-
y)*cos(teta_cp);
                    end
                    k=k+1;
                end
            end
        end
        end
        i = i+1;
    end
    j = j+1;
end

j = 1;
Fh_linha_p(PY+1,1) = 0;
Fh_linha_p(:,1) = 0;

Fh_linha_cp(PY+1,1) = 0;
Fh_linha_cp(:,1) = 0;

while j<=(PY+1)
    i = 4;
    while i<=(PX-2)

        Fh_linha_p(j,1) = ph_fh_p(j,i) + Fh_linha_p(j,1);
        Fh_linha_cp(j,1) = ph_fh_cp(j,i) + Fh_linha_cp(j,1);
        i = i+1;
    end
end

```

```

Fh_linha_p(j,1) = ph_fh_p(j,1)*3/8 + Fh_linha_p(j,1);
Fh_linha_p(j,1) = ph_fh_p(j,2)*7/6 + Fh_linha_p(j,1);
Fh_linha_p(j,1) = ph_fh_p(j,3)*23/24 + Fh_linha_p(j,1);
Fh_linha_p(j,1) = ph_fh_p(j,(PX-1))*23/24 + Fh_linha_p(j,1);
Fh_linha_p(j,1) = ph_fh_p(j,PX)*7/6 + Fh_linha_p(j,1);
Fh_linha_p(j,1) = ph_fh_p(j,(PX+1))*3/8 + Fh_linha_p(j,1);
Fh_linha_p(j,1) = Fh_linha_p(j,1) *2*delta_x_p/Diam;

Fh_linha_cp(j,1) = ph_fh_cp(j,1)*3/8 + Fh_linha_cp(j,1);
Fh_linha_cp(j,1) = ph_fh_cp(j,2)*7/6 + Fh_linha_cp(j,1);
Fh_linha_cp(j,1) = ph_fh_cp(j,3)*23/24 + Fh_linha_cp(j,1);
Fh_linha_cp(j,1) = ph_fh_cp(j,(PX-1))*23/24 + Fh_linha_cp(j,1);
Fh_linha_cp(j,1) = ph_fh_cp(j,PX)*7/6 + Fh_linha_cp(j,1);
Fh_linha_cp(j,1) = ph_fh_cp(j,(PX+1))*3/8 + Fh_linha_cp(j,1);
Fh_linha_cp(j,1) = Fh_linha_cp(j,1) *2*delta_x_cp/Diam;

j = j+1;
end

j = 4;
Fh_p = 0;
Fh_cp = 0;
while j<=(PY-2)
    Fh_p = Fh_p + Fh_linha_p(j,1);
    Fh_cp = Fh_cp + Fh_linha_cp(j,1);
    j = j+1;
end
Fh_p = Fh_linha_p(1,1)*3/8 + Fh_p;
Fh_p = Fh_linha_p(2,1)*7/6 + Fh_p;
Fh_p = Fh_linha_p(3,1)*23/24 + Fh_p;
Fh_p = Fh_linha_p((PY-1),1)*23/24 + Fh_p;
Fh_p = Fh_linha_p(PY,1)*7/6 + Fh_p;
Fh_p = Fh_linha_p((PY+1),1)*3/8 + Fh_p;
Fh_p = Fh_p*delta_y;

Fh_p = Fh_p*Diam/2;      %Força hidrodinâmica do lado de pressão

Fh_cp = Fh_linha_cp(1,1)*3/8 + Fh_cp;
Fh_cp = Fh_linha_cp(2,1)*7/6 + Fh_cp;
Fh_cp = Fh_linha_cp(3,1)*23/24 + Fh_cp;
Fh_cp = Fh_linha_cp((PY-1),1)*23/24 + Fh_cp;
Fh_cp = Fh_linha_cp(PY,1)*7/6 + Fh_cp;
Fh_cp = Fh_linha_cp((PY+1),1)*3/8 + Fh_cp;
Fh_cp = Fh_cp*delta_y;

Fh_cp = Fh_cp*Diam/2;      %Força hidrodinâmica do lado de contrapressão

j = 1;
Mh_linha_p(PY+1,1) = 0;
Mh_linha_p(:,1) = 0;

Mh_linha_cp(PY+1,1) = 0;
Mh_linha_cp(:,1) = 0;

while j<=(PY+1)
    i = 4;
    while i<=(PX-2)

```



```

    Mh_linha_p(j,1) = ph_mh_p(j,i) + Mh_linha_p(j,1);
    Mh_linha_cp(j,1) = ph_mh_cp(j,i) + Mh_linha_cp(j,1);
    i = i+1;
end
Mh_linha_p(j,1) = ph_mh_p(j,1)*3/8 + Mh_linha_p(j,1);
Mh_linha_p(j,1) = ph_mh_p(j,2)*7/6 + Mh_linha_p(j,1);
Mh_linha_p(j,1) = ph_mh_p(j,3)*23/24 + Mh_linha_p(j,1);
Mh_linha_p(j,1) = ph_mh_p(j,(PX-1))*23/24 + Mh_linha_p(j,1);
Mh_linha_p(j,1) = ph_mh_p(j,PX)*7/6 + Mh_linha_p(j,1);
Mh_linha_p(j,1) = ph_mh_p(j,(PX+1))*3/8 + Mh_linha_p(j,1);
Mh_linha_p(j,1) = Mh_linha_p(j,1) *2*delta_x_p/Diam;

Mh_linha_cp(j,1) = ph_mh_cp(j,1)*3/8 + Mh_linha_cp(j,1);
Mh_linha_cp(j,1) = ph_mh_cp(j,2)*7/6 + Mh_linha_cp(j,1);
Mh_linha_cp(j,1) = ph_mh_cp(j,3)*23/24 + Mh_linha_cp(j,1);
Mh_linha_cp(j,1) = ph_mh_cp(j,(PX-1))*23/24 + Mh_linha_cp(j,1);
Mh_linha_cp(j,1) = ph_mh_cp(j,PX)*7/6 + Mh_linha_cp(j,1);
Mh_linha_cp(j,1) = ph_mh_cp(j,(PX+1))*3/8 + Mh_linha_cp(j,1);
Mh_linha_cp(j,1) = Mh_linha_cp(j,1) *2*delta_x_cp/Diam;

    j = j+1;
end

j = 4;
Mh_p = 0;
Mh_cp = 0;
while j<=(PY-2)
    Mh_p = Mh_p + Mh_linha_p(j,1);
    Mh_cp = Mh_cp + Mh_linha_cp(j,1);
    j = j+1;
end
Mh_p = Mh_linha_p(1,1)*3/8 + Mh_p;
Mh_p = Mh_linha_p(2,1)*7/6 + Mh_p;
Mh_p = Mh_linha_p(3,1)*23/24 + Mh_p;
Mh_p = Mh_linha_p((PY-1),1)*23/24 + Mh_p;
Mh_p = Mh_linha_p(PY,1)*7/6 + Mh_p;
Mh_p = Mh_linha_p((PY+1),1)*3/8 + Mh_p;
Mh_p = Mh_p*delta_y;

Mh_p = Mh_p*Diam/2;      %Momento hidrodinâmico do lado de pressão

Mh_cp = Mh_linha_cp(1,1)*3/8 + Mh_cp;
Mh_cp = Mh_linha_cp(2,1)*7/6 + Mh_cp;
Mh_cp = Mh_linha_cp(3,1)*23/24 + Mh_cp;
Mh_cp = Mh_linha_cp((PY-1),1)*23/24 + Mh_cp;
Mh_cp = Mh_linha_cp(PY,1)*7/6 + Mh_cp;
Mh_cp = Mh_linha_cp((PY+1),1)*3/8 + Mh_cp;
Mh_cp = Mh_cp*delta_y;

Mh_cp = Mh_cp*Diam/2;      %Momento hidrodinâmico do lado de contrapressão

% Cálculo de Ffh e Mfh:

i = 1;

while i<=(PX+1)
    j = 1;

```

```

x_p = (i-1)*delta_x_p+le_p;
teta_p = 2*x_p/Diam;

x_cp = (i-1)*delta_x_cp+le_cp;
teta_cp = 2*x_cp/Diam;

while j<=(PY+1)
    if (h_medio_p(j,i)-omega)<0
        phi_f_p(j,i) = 0;
        phi_fs_p(j,i) = 0;
        phi_fp_p(j,i) = 0;
    else
        phi_f_p(j,i) =
(h_medio_p(j,i)/(2*omega))*log((h_medio_p(j,i)+omega)/(h_medio_p(j,i)-
omega));
        phi_fs_p(j,i) =
(3/2)*((h_medio_p(j,i)/omega)*log((h_medio_p(j,i)+omega)/(h_medio_p(j,i)-
omega))-2);
        phi_fp_p(j,i) = 1-(omega/h_medio_p(j,i))^2;
    end

    if (h_medio_cp(j,i)-omega)<0
        phi_f_cp(j,i) = 0;
        phi_fs_cp(j,i) = 0;
        phi_fp_cp(j,i) = 0;
    else
        phi_f_cp(j,i) =
(h_medio_cp(j,i)/(2*omega))*log((h_medio_cp(j,i)+omega)/(h_medio_cp(j,i)-
omega));
        phi_fs_cp(j,i) =
(3/2)*((h_medio_cp(j,i)/omega)*log((h_medio_cp(j,i)+omega)/(h_medio_cp(j,i)-
omega))-2);
        phi_fp_cp(j,i) = 1-(omega/h_medio_cp(j,i))^2;
    end

    if j<((PY+1)-5)
        dphdy_p(j,i) = (-3*ph_plot_p(j+4,i)+16*ph_plot_p(j+3,i)-
36*ph_plot_p(j+2,i)+48*ph_plot_p(j+1,i)-25*ph_plot_p(j,i))/(12*delta_y);
        dphdy_cp(j,i) = (-3*ph_plot_cp(j+4,i)+16*ph_plot_cp(j+3,i)-
36*ph_plot_cp(j+2,i)+48*ph_plot_cp(j+1,i)-25*ph_plot_cp(j,i))/(12*delta_y);
    else
        dphdy_p(j,i) = (3*ph_plot_p(j-4,i)-16*ph_plot_p(j-
3,i)+36*ph_plot_p(j-2,i)-48*ph_plot_p(j-
1,i)+25*ph_plot_p(j,i))/(12*delta_y);
        dphdy_cp(j,i) = (3*ph_plot_cp(j-4,i)-16*ph_plot_cp(j-
3,i)+36*ph_plot_cp(j-2,i)-48*ph_plot_cp(j-
1,i)+25*ph_plot_cp(j,i))/(12*delta_y);
    end

    Tau_p(j,i) = -
(mi*Vel/h_medio_p(j,i))*(phi_f_p(j,i)+phi_fs_p(j,i))+phi_fp_p(j,i)*h_medio_
p(j,i)*dphdy_p(j,i)/2;
    Tau_cos_p(j,i) = -Tau_p(j,i)*(cos(teta_p)*Diam/2 - Cp);
    Tau_cp(j,i) = -
(mi*Vel/h_medio_cp(j,i))*(phi_f_cp(j,i)+phi_fs_cp(j,i))+phi_fp_cp(j,i)*h_me
dio_cp(j,i)*dphdy_cp(j,i)/2;
    Tau_cos_cp(j,i) = Tau_cp(j,i)*(cos(teta_cp)*Diam/2 + Cp);

    j = j+1;
end

```

```

        i = i+1;
end

j = 1;
Ffh_linha_p(PY+1,1) = 0;
Ffh_linha_p(:,1) = 0;
Ffh_linha_cp(PY+1,1) = 0;
Ffh_linha_cp(:,1) = 0;

while j<=(PY+1)
    i = 4;
    while i<=(PX-2)

        Ffh_linha_p(j,1) = Tau_p(j,i) + Ffh_linha_p(j,1);
        Ffh_linha_cp(j,1) = Tau_cp(j,i) + Ffh_linha_cp(j,1);
        i = i+1;
    end
    Ffh_linha_p(j,1) = Tau_p(j,1)*3/8 + Ffh_linha_p(j,1);
    Ffh_linha_p(j,1) = Tau_p(j,2)*7/6 + Ffh_linha_p(j,1);
    Ffh_linha_p(j,1) = Tau_p(j,3)*23/24 + Ffh_linha_p(j,1);
    Ffh_linha_p(j,1) = Tau_p(j,(PX-1))*23/24 + Ffh_linha_p(j,1);
    Ffh_linha_p(j,1) = Tau_p(j,PX)*7/6 + Ffh_linha_p(j,1);
    Ffh_linha_p(j,1) = Tau_p(j,(PX+1))*3/8 + Ffh_linha_p(j,1);
    Ffh_linha_p(j,1) = Ffh_linha_p(j,1) *2*delta_x_p/Diam;

    Ffh_linha_cp(j,1) = Tau_cp(j,1)*3/8 + Ffh_linha_cp(j,1);
    Ffh_linha_cp(j,1) = Tau_cp(j,2)*7/6 + Ffh_linha_cp(j,1);
    Ffh_linha_cp(j,1) = Tau_cp(j,3)*23/24 + Ffh_linha_cp(j,1);
    Ffh_linha_cp(j,1) = Tau_cp(j,(PX-1))*23/24 + Ffh_linha_cp(j,1);
    Ffh_linha_cp(j,1) = Tau_cp(j,PX)*7/6 + Ffh_linha_cp(j,1);
    Ffh_linha_cp(j,1) = Tau_cp(j,(PX+1))*3/8 + Ffh_linha_cp(j,1);
    Ffh_linha_cp(j,1) = Ffh_linha_cp(j,1) *2*delta_x_cp/Diam;

    j = j+1;
end

j = 4;
Ffh_p = 0;
Ffh_cp = 0;
while j<=(PY-2)
    Ffh_p = Ffh_p + Ffh_linha_p(j,1);
    Ffh_cp = Ffh_cp + Ffh_linha_cp(j,1);
    j = j+1;
end

Ffh_p = Ffh_linha_p(1,1)*3/8 + Ffh_p;
Ffh_p = Ffh_linha_p(2,1)*7/6 + Ffh_p;
Ffh_p = Ffh_linha_p(3,1)*23/24 + Ffh_p;
Ffh_p = Ffh_linha_p((PY-1),1)*23/24 + Ffh_p;
Ffh_p = Ffh_linha_p(PY,1)*7/6 + Ffh_p;
Ffh_p = Ffh_linha_p((PY+1),1)*3/8 + Ffh_p;
Ffh_p = Ffh_p*delta_y;

Ffh_p = Ffh_p*Diam/2;    %Força de atrito hidrodinâmico do lado de pressão

Ffh_cp = Ffh_linha_cp(1,1)*3/8 + Ffh_cp;
Ffh_cp = Ffh_linha_cp(2,1)*7/6 + Ffh_cp;
Ffh_cp = Ffh_linha_cp(3,1)*23/24 + Ffh_cp;

```

```

Ffh_cp = Ffh_linha_cp((PY-1),1)*23/24 + Ffh_cp;
Ffh_cp = Ffh_linha_cp(PY,1)*7/6 + Ffh_cp;
Ffh_cp = Ffh_linha_cp((PY+1),1)*3/8 + Ffh_cp;
Ffh_cp = Ffh_cp*delta_y;

Ffh_cp = Ffh_cp*Diam/2; %Força de atrito hidrod. do lado de contrapressão

j = 1;
Mfh_linha_p(PY+1,1) = 0;
Mfh_linha_p(:,1) = 0;
Mfh_linha_cp(PY+1,1) = 0;
Mfh_linha_cp(:,1) = 0;

while j<=(PY+1)
    i = 4;
    while i<=(PX-2)

        Mfh_linha_p(j,1) = Tau_cos_p(j,i) + Mfh_linha_p(j,1);
        Mfh_linha_cp(j,1) = Tau_cos_cp(j,i) + Mfh_linha_cp(j,1);
        i = i+1;
    end
    Mfh_linha_p(j,1) = Tau_cos_p(j,1)*3/8 + Mfh_linha_p(j,1);
    Mfh_linha_p(j,1) = Tau_cos_p(j,2)*7/6 + Mfh_linha_p(j,1);
    Mfh_linha_p(j,1) = Tau_cos_p(j,3)*23/24 + Mfh_linha_p(j,1);
    Mfh_linha_p(j,1) = Tau_cos_p(j,(PX-1))*23/24 + Mfh_linha_p(j,1);
    Mfh_linha_p(j,1) = Tau_cos_p(j,PX)*7/6 + Mfh_linha_p(j,1);
    Mfh_linha_p(j,1) = Tau_cos_p(j,(PX+1))*3/8 + Mfh_linha_p(j,1);
    Mfh_linha_p(j,1) = Mfh_linha_p(j,1) *2*delta_x_p/Diam;

    Mfh_linha_cp(j,1) = Tau_cos_cp(j,1)*3/8 + Mfh_linha_cp(j,1);
    Mfh_linha_cp(j,1) = Tau_cos_cp(j,2)*7/6 + Mfh_linha_cp(j,1);
    Mfh_linha_cp(j,1) = Tau_cos_cp(j,3)*23/24 + Mfh_linha_cp(j,1);
    Mfh_linha_cp(j,1) = Tau_cos_cp(j,(PX-1))*23/24 + Mfh_linha_cp(j,1);
    Mfh_linha_cp(j,1) = Tau_cos_cp(j,PX)*7/6 + Mfh_linha_cp(j,1);
    Mfh_linha_cp(j,1) = Tau_cos_cp(j,(PX+1))*3/8 + Mfh_linha_cp(j,1);
    Mfh_linha_cp(j,1) = Mfh_linha_cp(j,1) *2*delta_x_cp/Diam;

    j = j+1;
end

j = 4;
Mfh_p = 0;
Mfh_cp = 0;
while j<=(PY-2)
    Mfh_p = Mfh_p + Mfh_linha_p(j,1);
    Mfh_cp = Mfh_cp + Mfh_linha_cp(j,1);
    j = j+1;
end

Mfh_p = Mfh_linha_p(1,1)*3/8 + Mfh_p;
Mfh_p = Mfh_linha_p(2,1)*7/6 + Mfh_p;
Mfh_p = Mfh_linha_p(3,1)*23/24 + Mfh_p;
Mfh_p = Mfh_linha_p((PY-1),1)*23/24 + Mfh_p;
Mfh_p = Mfh_linha_p(PY,1)*7/6 + Mfh_p;
Mfh_p = Mfh_linha_p((PY+1),1)*3/8 + Mfh_p;
Mfh_p = Mfh_p*delta_y;

Mfh_p = Mfh_p*Diam/2; %Momento do atrito hidrodinâmico do lado de pressão

```

```

Mfh_cp = Mfh_linha_cp(1,1)*3/8 + Mfh_cp;
Mfh_cp = Mfh_linha_cp(2,1)*7/6 + Mfh_cp;
Mfh_cp = Mfh_linha_cp(3,1)*23/24 + Mfh_cp;
Mfh_cp = Mfh_linha_cp((PY-1),1)*23/24 + Mfh_cp;
Mfh_cp = Mfh_linha_cp(PY,1)*7/6 + Mfh_cp;
Mfh_cp = Mfh_linha_cp((PY+1),1)*3/8 + Mfh_cp;
Mfh_cp = Mfh_cp*delta_y;

Mfh_cp = Mfh_cp*Diam/2; %Momento do atrito hidrod. do lado de contrapressão

%Cálculo de Fc, Mc, Ffc e Mfc do lado de pressão:

i = 1;
h_sup = C + et;
h_inf = C + eb;
contato = 0;

if h_sup < omega
    contato = 1;
end

if h_inf < omega
    contato = 1;
end

if contato == 1
    while i<=(PX_c+1)
        j = 1;
        x_p = (i-1)*delta_x_p_c+le_p;
        teta_p = 2*x_p/Diam;

        while j<=(PY_c+1)
            y = (j-1)*delta_y_c+li;
            h_medio_p_c(j,i) = C+et*cos(teta_p)+(eb-et)*y*cos(teta_p)/L;

            % Cálculo da espessura média de filme de óleo

            if h_medio_p_c(j,i) < omega
                delta_p(j,i) = omega - h_medio_p_c(j,i);
                Pw(j,i) = delta_p(j,i)*E/1.077;
                pw_fc(j,i) = Pw(j,i)*cos(teta_p);
                pw_mc(j,i) = Pw(j,i)*(a-y)*cos(teta_p);
                pw_ffc(j,i) = Pw(j,i)*mif;
                pw_mfc(j,i) = Pw(j,i)*mif*((Diam/2)*cos(teta_p)-Cp);
            end

            if h_medio_p_c(j,i) >= omega
                delta_p(j,i) = omega - h_medio_p_c(j,i);
                Pw(j,i) = 0;
                pw_fc(j,i) = 0;
                pw_mc(j,i) = 0;
                pw_ffc(j,i) = 0;
                pw_mfc(j,i) = 0;
            end
            j = j+1;
        end
    end
end

```

```

        i = i+1;
    end

    j = 1;
    Fc_linha(PY_c+1,1) = 0;
    Fc_linha(:,1) = 0;

    while j<=(PY_c+1)
        i = 4;
        while i<=(PX_c-2)

            Fc_linha(j,1) = pw_fc(j,i) + Fc_linha(j,1);
            i = i+1;
        end
        Fc_linha(j,1) = pw_fc(j,1)*3/8 + Fc_linha(j,1);
        Fc_linha(j,1) = pw_fc(j,2)*7/6 + Fc_linha(j,1);
        Fc_linha(j,1) = pw_fc(j,3)*23/24 + Fc_linha(j,1);
        Fc_linha(j,1) = pw_fc(j,(PX_c-1))*23/24 + Fc_linha(j,1);
        Fc_linha(j,1) = pw_fc(j,PX_c)*7/6 + Fc_linha(j,1);
        Fc_linha(j,1) = pw_fc(j,(PX_c+1))*3/8 + Fc_linha(j,1);
        Fc_linha(j,1) = Fc_linha(j,1)*2*delta_x_p_c/Diam;

        j = j+1;
    end
    j = 1;
    Fc_p = 0;
    while j<=(PY_c+1)
        Fc_p = Fc_p + Fc_linha(j,1);
        j = j+1;
    end
    Fc_p = Fc_p*Diam/2;           %Força contato do lado de pressão

    j = 1;
    Mc_linha(PY_c+1,1) = 0;
    Mc_linha(:,1) = 0;

    while j<=(PY_c+1)
        i = 4;
        while i<=(PX_c-2)

            Mc_linha(j,1) = pw_mc(j,i) + Mc_linha(j,1);
            i = i+1;
        end
        Mc_linha(j,1) = pw_mc(j,1)*3/8 + Mc_linha(j,1);
        Mc_linha(j,1) = pw_mc(j,2)*7/6 + Mc_linha(j,1);
        Mc_linha(j,1) = pw_mc(j,3)*23/24 + Mc_linha(j,1);
        Mc_linha(j,1) = pw_mc(j,(PX_c-1))*23/24 + Mc_linha(j,1);
        Mc_linha(j,1) = pw_mc(j,PX_c)*7/6 + Mc_linha(j,1);
        Mc_linha(j,1) = pw_mc(j,(PX_c+1))*3/8 + Mc_linha(j,1);
        Mc_linha(j,1) = Mc_linha(j,1) *2*delta_x_p_c/Diam;

        j = j+1;
    end
    j = 1;
    Mc_p = 0;
    while j<=(PY_c+1)
        Mc_p = Mc_p + Mc_linha(j,1);
        j = j+1;
    end

```

```

end
Mc_p = Mc_p*Diam/2;           %Momento contato do lado de pressão

j = 1;
Ffc_linha(PY_c+1,1) = 0;
Ffc_linha(:,1) = 0;

while j<=(PY_c+1)
    i = 4;
    while i<=(PX_c-2)

        Ffc_linha(j,1) = pw_ffc(j,i) + Ffc_linha(j,1);
        i = i+1;
    end
    Ffc_linha(j,1) = pw_ffc(j,1)*3/8 + Ffc_linha(j,1);
    Ffc_linha(j,1) = pw_ffc(j,2)*7/6 + Ffc_linha(j,1);
    Ffc_linha(j,1) = pw_ffc(j,3)*23/24 + Ffc_linha(j,1);
    Ffc_linha(j,1) = pw_ffc(j,(PX_c-1))*23/24 + Ffc_linha(j,1);
    Ffc_linha(j,1) = pw_ffc(j,PX_c)*7/6 + Ffc_linha(j,1);
    Ffc_linha(j,1) = pw_ffc(j,(PX_c+1))*3/8 + Ffc_linha(j,1);
    Ffc_linha(j,1) = Ffc_linha(j,1) *2*delta_x_p_c/Diam;

    j = j+1;
end
j = 1;
Ffc_p = 0;
while j<=(PY_c+1)
    Ffc_p = Ffc_p + Ffc_linha(j,1);
    j = j+1;
end

Ffc_p = -(abs(Vel)/Vel)*Ffc_p*Diam/2; %Força de atrito de contato do
lado de pressão

j = 1;
Mfc_linha(PY_c+1,1) = 0;
Mfc_linha(:,1) = 0;

while j<=(PY_c+1)
    i = 4;
    while i<=(PX_c-2)

        Mfc_linha(j,1) = pw_mfc(j,i) + Mfc_linha(j,1);
        i = i+1;
    end
    Mfc_linha(j,1) = pw_mfc(j,1)*3/8 + Mfc_linha(j,1);
    Mfc_linha(j,1) = pw_mfc(j,2)*7/6 + Mfc_linha(j,1);
    Mfc_linha(j,1) = pw_mfc(j,3)*23/24 + Mfc_linha(j,1);
    Mfc_linha(j,1) = pw_mfc(j,(PX_c-1))*23/24 + Mfc_linha(j,1);
    Mfc_linha(j,1) = pw_mfc(j,PX_c)*7/6 + Mfc_linha(j,1);
    Mfc_linha(j,1) = pw_mfc(j,(PX_c+1))*3/8 + Mfc_linha(j,1);
    Mfc_linha(j,1) = Mfc_linha(j,1) *2*delta_x_p_c/Diam;

    j = j+1;
end
j = 1;
Mfc_p = 0;
while j<=(PY_c+1)

```

```

        Mfc_p = Mfc_p + Mfc_linha(j,1);
        j = j+1;
    end
    Mfc_p = (abs(Vel)/Vel)*Mfc_p*Diam/2; %Momento de atrito de
    contato do lado de pressão

end

if contato == 0
    Fc_p = 0;
    Mc_p = 0;
    Ffc_p = 0;
    Mfc_p = 0;
end

%Cálculo de Fc, Mc, Ffc e Mfc do lado de pressão:

i = 1;
h_sup = C - et;
h_inf = C - eb;
contato = 0;

if h_sup < omega
    contato = 1;
end

if h_inf < omega
    contato = 1;
end

if contato == 1
    while i<=(PX_c+1)
        j = 1;
        x = (i-1)*delta_x_cp_c+le_cp;
        teta = 2*x/Diam;

        while j<=(PY_c+1)
            y = (j-1)*delta_y_c+li;
            h_medio_c(j,i) = C-et*cos(teta)-(eb-et)*y*cos(teta)/L;

            % Cálculo da espessura média de filme de óleo

            if h_medio_c(j,i) < omega
                delta(j,i) = omega - h_medio_c(j,i);
                Pw(j,i) = delta(j,i)*E/1.077;
                pw_fc(j,i) = -Pw(j,i)*cos(teta);
                pw_mc(j,i) = -Pw(j,i)*(a-y)*cos(teta);
                pw_ffc(j,i) = Pw(j,i)*mif;
                pw_mfc(j,i) = -Pw(j,i)*mif*((Diam/2)*cos(teta)+Cp);
            end

            if h_medio_c(j,i) >= omega
                delta(j,i) = omega - h_medio_c(j,i);
                Pw(j,i) = 0;
                pw_fc(j,i) = 0;
                pw_mc(j,i) = 0;
                pw_ffc(j,i) = 0;
            end
        end
    end
end

```



```

        pw_mfc(j,i) = 0;
    end
    j = j+1;
end
i = i+1;
end

j = 1;
Fc_linha(PY_c+1,1) = 0;
Fc_linha(:,1) = 0;

while j<=(PY_c+1)
    i = 4;
    while i<=(PX_c-2)

        Fc_linha(j,1) = pw_fc(j,i) + Fc_linha(j,1);
        i = i+1;
    end
    Fc_linha(j,1) = pw_fc(j,1)*3/8 + Fc_linha(j,1);
    Fc_linha(j,1) = pw_fc(j,2)*7/6 + Fc_linha(j,1);
    Fc_linha(j,1) = pw_fc(j,3)*23/24 + Fc_linha(j,1);
    Fc_linha(j,1) = pw_fc(j,(PX_c-1))*23/24 + Fc_linha(j,1);
    Fc_linha(j,1) = pw_fc(j,PX_c)*7/6 + Fc_linha(j,1);
    Fc_linha(j,1) = pw_fc(j,(PX_c+1))*3/8 + Fc_linha(j,1);
    Fc_linha(j,1) = Fc_linha(j,1)*2*delta_x_cp_c/Diam;

    j = j+1;
end
j = 1;
Fc_cp = 0;
while j<=(PY_c+1)
    Fc_cp = Fc_cp + Fc_linha(j,1);
    j = j+1;
end
Fc_cp = Fc_cp*Diam/2; %Força contato do lado de contrapressão

j = 1;
Mc_linha(PY_c+1,1) = 0;
Mc_linha(:,1) = 0;

while j<=(PY_c+1)
    i = 4;
    while i<=(PX_c-2)

        Mc_linha(j,1) = pw_mc(j,i) + Mc_linha(j,1);
        i = i+1;
    end
    Mc_linha(j,1) = pw_mc(j,1)*3/8 + Mc_linha(j,1);
    Mc_linha(j,1) = pw_mc(j,2)*7/6 + Mc_linha(j,1);
    Mc_linha(j,1) = pw_mc(j,3)*23/24 + Mc_linha(j,1);
    Mc_linha(j,1) = pw_mc(j,(PX_c-1))*23/24 + Mc_linha(j,1);
    Mc_linha(j,1) = pw_mc(j,PX_c)*7/6 + Mc_linha(j,1);
    Mc_linha(j,1) = pw_mc(j,(PX_c+1))*3/8 + Mc_linha(j,1);
    Mc_linha(j,1) = Mc_linha(j,1) *2*delta_x_cp_c/Diam;

    j = j+1;
end
j = 1;
Mc_cp = 0;

```

```

while j<=(PY_c+1)
    Mc_cp = Mc_cp + Mc_linha(j,1);    %Momento contato do lado de
contrapressão
    j = j+1;
end
Mc_cp = Mc_cp*Diam/2;

j = 1;
Ffc_linha(PY_c+1,1) = 0;
Ffc_linha(:,1) = 0;

while j<=(PY_c+1)
    i = 4;
    while i<=(PX_c-2)

        Ffc_linha(j,1) = pw_ffc(j,i) + Ffc_linha(j,1);
        i = i+1;
    end
    Ffc_linha(j,1) = pw_ffc(j,1)*3/8 + Ffc_linha(j,1);
    Ffc_linha(j,1) = pw_ffc(j,2)*7/6 + Ffc_linha(j,1);
    Ffc_linha(j,1) = pw_ffc(j,3)*23/24 + Ffc_linha(j,1);
    Ffc_linha(j,1) = pw_ffc(j,(PX_c-1))*23/24 + Ffc_linha(j,1);
    Ffc_linha(j,1) = pw_ffc(j,PX_c)*7/6 + Ffc_linha(j,1);
    Ffc_linha(j,1) = pw_ffc(j,(PX_c+1))*3/8 + Ffc_linha(j,1);
    Ffc_linha(j,1) = Ffc_linha(j,1) *2*delta_x_cp_c/Diam;

    j = j+1;
end
j = 1;
Ffc_cp = 0;
while j<=(PY_c+1)
    Ffc_cp = Ffc_cp + Ffc_linha(j,1);
    j = j+1;
end
Ffc_cp = -(abs(Vel)/Vel)*Ffc_cp*Diam/2;    %Força de atrito contato do
lado de contrapressão

j = 1;
Mfc_linha(PY_c+1,1) = 0;
Mfc_linha(:,1) = 0;

while j<=(PY_c+1)
    i = 4;
    while i<=(PX_c-2)

        Mfc_linha(j,1) = pw_mfc(j,i) + Mfc_linha(j,1);
        i = i+1;
    end
    Mfc_linha(j,1) = pw_mfc(j,1)*3/8 + Mfc_linha(j,1);
    Mfc_linha(j,1) = pw_mfc(j,2)*7/6 + Mfc_linha(j,1);
    Mfc_linha(j,1) = pw_mfc(j,3)*23/24 + Mfc_linha(j,1);
    Mfc_linha(j,1) = pw_mfc(j,(PX_c-1))*23/24 + Mfc_linha(j,1);
    Mfc_linha(j,1) = pw_mfc(j,PX_c)*7/6 + Mfc_linha(j,1);
    Mfc_linha(j,1) = pw_mfc(j,(PX_c+1))*3/8 + Mfc_linha(j,1);
    Mfc_linha(j,1) = Mfc_linha(j,1) *2*delta_x_cp_c/Diam;

    j = j+1;
end
j = 1;

```

```

Mfc_cp = 0;
while j<=(PY_c+1)
    Mfc_cp = Mfc_cp + Mfc_linha(j,1);
    j = j+1;
end
Mfc_cp = (abs(Vel)/Vel)*Mfc_cp*Diam/2; %Momento de atrito contato do
lado de contrapressão

end

if contato == 0
    Fc_cp = 0;
    Mc_cp = 0;
    Ffc_cp = 0;
    Mfc_cp = 0;
end

%Resumo dos resultados:

sys(1,1) = Fh_p+Fh_cp;
sys(2,1) = Mh_p+Mh_cp;
sys(3,1) = Ffh_p+Ffh_cp;
sys(4,1) = Mfh_p+Mfh_cp;
sys(5,1) = Fc_p+Fc_cp;
sys(6,1) = Mc_p+Mc_cp;
sys(7,1) = Ffc_p+Ffc_cp;
sys(8,1) = Mfc_p+Mfc_cp;

sys(10,1) = psi;
sys(9,1) = phi_cine;
sys(11,1) = Y_2p;
sys(12,1) = psiabs;

```